9. ПРОМЕНА БАЗИСА У ВЕКТОРСКОМ ПРОСТОРУ

(9.1) Како се мења матрица преласка (матрица развијања) из базиса $\{|v_1\rangle,|v_2\rangle,\dots,|v_n\rangle\}$ у базис $\{|\bar v_1\rangle,|\bar v_2\rangle,\dots,|\bar v_n\rangle\}$, ако

(а) $|v_i\rangle$ и $|v_j\rangle$ замене места;

(б) $|\bar v_i\rangle$ и $|\bar v_j\rangle$ замене места?

У векторском простору $\mathbb{V}^n$ дати су базиси $\{|v_i\rangle, i=\overline{1,n}\}$ и $\{|\bar v_i\rangle, i=\overline{1,n}\}$, међусобно повезани *несингуларном* матрицом - да се ради о сингуларној, вектори $\{|\bar v_i\rangle\}$ не би били базис (били би линеарно зависни). Овом матрицом вектори $\{|\bar v_i\rangle\}$ могу се развити по векторима $\{|v_i\rangle\}$

$$\begin{cases}
|\bar v_1\rangle = r_{11}|v_1\rangle + r_{12}|v_2\rangle + \dots + r_{1i}|v_i\rangle + r_{1j}|v_j\rangle + \dots + r_{1,n-1}|v_{n-1}\rangle + r_{1n}|v_n\rangle \\
|\bar v_2\rangle = r_{21}|v_1\rangle + r_{22}|v_2\rangle + \dots + r_{2i}|v_i\rangle + r_{2j}|v_j\rangle + \dots + r_{2,n-1}|v_{n-1}\rangle + r_{2n}|v_n\rangle \\
\quad\vdots \\
|\bar v_i\rangle = r_{i1}|v_1\rangle + r_{i2}|v_2\rangle + \dots + r_{ii}|v_i\rangle + r_{ij}|v_j\rangle + \dots + r_{i,n-1}|v_{n-1}\rangle + r_{in}|v_n\rangle \\
|\bar v_j\rangle = r_{j1}|v_1\rangle + r_{j2}|v_2\rangle + \dots + r_{ji}|v_i\rangle + r_{jj}|v_j\rangle + \dots + r_{j,n-1}|v_{n-1}\rangle + r_{jn}|v_n\rangle \\
\quad\vdots \\
|\bar v_{n-1}\rangle = r_{n-1,1}|v_1\rangle + r_{n-1,2}|v_2\rangle + \dots + r_{n-1,i}|v_i\rangle + r_{n-1,j}|v_j\rangle + \dots + r_{n-1,n-1}|v_{n-1}\rangle + r_{n-1,n}|v_n\rangle \\
|\bar v_n\rangle = r_{n1}|v_1\rangle + r_{n2}|v_2\rangle + \dots + r_{ni}|v_i\rangle + r_{nj}|v_j\rangle + \dots + r_{n,n-1}|v_{n-1}\rangle + r_{nn}|v_n\rangle
\end{cases}$$

Из горње формуле добија се матрица развијања једног базиса по другом

$$\mathscr{R} = \begin{bmatrix}
r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1i} & r_{1j} & \cdots & r_{1,n-1} & r_{1n} \\
r_{21} & r_{22} & \cdots & r_{2i} & r_{2j} & \cdots & r_{2,n-1} & r_{2n} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
r_{i1} & r_{i2} & \cdots & r_{ii} & r_{ij} & \cdots & r_{i,n-1} & r_{in} \\
r_{j1} & r_{j2} & \cdots & r_{ji} & r_{jj} & \cdots & r_{j,n-1} & r_{jn} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
r_{n-1,1} & r_{n-1,2} & \cdots & r_{n-1,i} & r_{n-1,j} & \cdots & r_{n-1,n-1} & r_{n-1,n} \\
r_{n1} & r_{n2} & \cdots & r_{ni} & r_{nj} & \cdots & r_{n,n-1} & r_{nn}
\end{bmatrix}.$$

(а) При промени места вектора $|v_i\rangle$ и $|v_j\rangle$ у горњем систему једначина би у матрици развијања би измениле места *колоне* i и j;

(б) При промени места вектора $|\bar v_i\rangle$ и $|\bar v_j\rangle$ у горњем систему једначина би у матрици развијања измениле места *врсте* i и j.

(9.2) Нека је $\hat{A}$ оператор којим се из базиса $\{|u_1\rangle,|u_2\rangle,\ldots,|u_n\rangle\}$ прелази у базис $\{|v_1\rangle,|v_2\rangle,\ldots,|v_n\rangle\}$, и нека је $\hat{B}$ оператор којим се из базиса $\{|v_1\rangle,|v_2\rangle,\ldots,|v_n\rangle\}$ прелази у базис $\{|w_1\rangle,|w_2\rangle,\ldots,|w_n\rangle\}$. Одредити оператор $\hat{C}$ којим се из базиса $\{|u_1\rangle,|u_2\rangle,\ldots,|u_n\rangle\}$ прелази у базис $\{|w_1\rangle,|w_2\rangle,\ldots,|w_n\rangle\}$. Матрицу оператора $\hat{C}$ изразити преко матрица оператора $\hat{A}$ и $\hat{B}$ у сва три наведена базиса.

На основу ниже дате шеме

$$\{|u_1\rangle,|u_2\rangle,\ldots,|u_n\rangle\}\xrightarrow{\hat{A}}\{|v_1\rangle,|v_2\rangle,\ldots,|v_n\rangle\}\xrightarrow{\hat{B}}\{|w_1\rangle,|w_2\rangle,\ldots,|w_n\rangle\}$$

може да се напише следеће

$$\underline{\begin{cases}|v_i\rangle=\hat{A}|u_i\rangle\\|w_i\rangle=\hat{B}|v_i\rangle\end{cases}}\Rightarrow\ |w_i\rangle=\hat{B}|v_i\rangle=\hat{B}\left(\hat{A}|u_i\rangle\right)=(\hat{B}\hat{A})|u_i\rangle\,.$$

На основу шеме

$$\{|u_1\rangle,|u_2\rangle,\ldots,|u_n\rangle\}\xrightarrow{\hat{C}}\{|w_1\rangle,|w_2\rangle,\ldots,|w_n\rangle\}$$

може се написати да је

$$|w_i\rangle=\hat{C}|u_i\rangle\,;$$

Поређењем добијених израза мора бити

$$\hat{C}=\hat{B}\hat{A}\,.$$

Када је о базисима реч, важи следеће

$$\left[\hat{A}\right]_{\{|u_i\rangle\}}=\left[\hat{A}\right]_{\{|v_i\rangle\}}=\mathscr{A}$$
$$\left[\hat{B}\right]_{\{|v_i\rangle\}}=\left[\hat{B}\right]_{\{|w_i\rangle\}}=\mathscr{B}$$

Матрица траженог оператора у другом базису једнака је

$$\left[\hat{C}\right]_{\{|v_i\rangle\}}=\left[\hat{B}\hat{A}\right]_{\{|v_i\rangle\}}=\left[\hat{B}\right]_{\{|v_i\rangle\}}\left[\hat{A}\right]_{\{|v_i\rangle\}}=\mathscr{B}\cdot\mathscr{A}\,.$$

Матрица траженог оператора у првом базису гласи

$$\left[\hat{C}\right]_{\{|u_i\rangle\}}=\left[\hat{B}\hat{A}\right]_{\{|u_i\rangle\}}=\left[\hat{B}\right]_{\{|u_i\rangle\}}\left[\hat{A}\right]_{\{|u_i\rangle\}}=\left[\hat{B}\right]_{\{|u_i\rangle\}}\mathscr{A}\,;$$

на основу трансформације сличности је

$$\left[\hat{B}\right]_{\{|u_i\rangle\}}=\mathscr{A}\left[\hat{B}\right]_{\{|v_i\rangle\}}\mathscr{A}^{-1}=\mathscr{A}\mathscr{B}\mathscr{A}^{-1}$$

те следи

$$\left[\hat{C}\right]_{\{|u_i\rangle\}}=\mathscr{A}\mathscr{B}\mathscr{A}^{-1}\mathscr{A}=\mathscr{A}\mathscr{B}\,.$$

Матрица траженог оператора у трећем базису је

$$\left[\hat{C}\right]_{\{|w_i\rangle\}} = \left[\hat{B}\hat{A}\right]_{\{|w_i\rangle\}} = \left[\hat{B}\right]_{\{|w_i\rangle\}} \left[\hat{A}\right]_{\{|w_i\rangle\}} = \mathscr{B}\left[\hat{A}\right]_{\{|w_i\rangle\}} .$$

Узимањем у обзир трансформације сличности

$$\left[\hat{A}\right]_{\{|w_i\rangle\}} = \mathscr{B}^{-1}\left[\hat{A}\right]_{\{|v_i\rangle\}}\mathscr{B} = \mathscr{B}^{-1}\mathscr{A}\mathscr{B}$$

биће

$$\left[\hat{C}\right]_{\{|w_i\rangle\}} = \mathscr{B}\mathscr{B}^{-1}\mathscr{A}\mathscr{B} = \mathscr{A}\mathscr{B} .$$

Обратити пажњу да је

$$\left[\hat{C}\right]_{\{|u_i\rangle\}} = \left[\hat{C}\right]_{\{|w_i\rangle\}} = \mathscr{A}\mathscr{B} .$$

(9.3) У векторском простору $\mathbb{R}^3$ дати су

први базис: $\{|u_1\rangle = (1,1,0), |u_2\rangle = (1,0,1), |u_3\rangle = (0,1,1)\}$,

други базис: $\{|v_1\rangle = (1,0,0), |v_2\rangle = (1,1,0), |v_3\rangle = (1,1,1)\}$.

Одредити матрицу преласка $\mathscr{T}$ из првог у други базис

(а) у апсолутном базису $\{|\mathrm{e}_1\rangle, |\mathrm{e}_2\rangle, |\mathrm{e}_3\rangle\}$;

(б) у базису $\{|u_1\rangle, |u_2\rangle, |u_3\rangle\}$;

(в) у базису $\{|v_1\rangle, |v_2\rangle, |v_3\rangle\}$.

Матрица преласка из првог у други базис добија се решавањем проблема у матричном простору, у коме су дати вектори представљени матрицама-колонама а оператори квадратним матрицама.

(а) У апсолутном базису, пресликавања

$$|u_1\rangle \xrightarrow{\hat{T}} |v_1\rangle$$
$$|u_2\rangle \xrightarrow{\hat{T}} |v_2\rangle$$
$$|u_3\rangle \xrightarrow{\hat{T}} |v_3\rangle$$

могу да се напишу на следећи начин

$$|v_1\rangle = \hat{T}|u_1\rangle$$
$$|v_2\rangle = \hat{T}|u_2\rangle$$
$$|v_3\rangle = \hat{T}|u_3\rangle$$

што у матричном облику гласи

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{11}+t_{12} \\ t_{21}+t_{22} \\ t_{31}+t_{32} \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{11}+t_{13} \\ t_{21}+t_{23} \\ t_{31}+t_{33} \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{12}+t_{13} \\ t_{22}+t_{23} \\ t_{32}+t_{33} \end{bmatrix}$$

Одавде следе три система једначина, из којих се могу добити матрични елементи матрице преласка

$$\begin{cases} t_{11}+t_{12}=1 \\ t_{21}+t_{22}=0 \\ t_{31}+t_{32}=0 \end{cases}, \quad \begin{cases} t_{11}+t_{13}=1 \\ t_{21}+t_{23}=1 \\ t_{31}+t_{33}=0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} t_{12}+t_{13}=1 \\ t_{22}+t_{23}=1 \\ t_{32}+t_{33}=1 \end{cases}$$

Матрични елементи у првој врсти матрице преласка добијају се из првих једначина горња три система

$$\begin{cases} t_{11}+t_{12}=1 \\ t_{11}+t_{13}=1 \\ t_{12}+t_{13}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t_{11}+t_{12}=1 \\ t_{11}+t_{13}=1 \\ -t_{12}-t_{13}=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_{11}+t_{12}=1 \\ t_{11}-t_{12}=0 \\ -t_{12}-t_{13}=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t_{11}+t_{12}=1 \\ t_{11}=t_{12} \\ t_{12}+t_{13}=1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t_{12}+t_{12}=1 \\ t_{11}=t_{12} \\ t_{13}=1-t_{12} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2t_{12}=1 \\ t_{11}=t_{12} \\ t_{13}=1-t_{12} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t_{12}=1/2 \\ t_{11}=1/2 \\ t_{13}=1-t_{12} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t_{11}=1/2 \\ t_{12}=1/2 \\ t_{13}=1/2 \end{cases}$$

Матрични елементи у другој врсти матрице преласка добијају се из других једначина горња три система

$$\begin{cases} t_{21}+t_{22}=0 \\ t_{21}+t_{23}=1 \\ t_{22}+t_{23}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t_{21}=-t_{22} \\ t_{21}+t_{23}=1 \\ t_{22}+t_{23}=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_{21}=-t_{22} \\ -t_{22}+t_{23}=1 \\ t_{22}+t_{23}=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_{21}=-t_{22} \\ 2t_{23}=2 \\ t_{22}+t_{23}=1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t_{21}=-t_{22} \\ t_{23}=1 \\ t_{22}=1-t_{23} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_{21}=-t_{22} \\ t_{23}=1 \\ t_{22}=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_{21}=0 \\ t_{22}=0 \\ t_{23}=1 \end{cases}$$

Матрични елементи у трећој врсти матрице преласка добијају се из трећих једначина горња три система

$$\begin{cases} t_{31}+t_{32}=0 \\ t_{31}+t_{33}=0 \\ t_{32}+t_{33}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t_{31}+t_{32}=0 \\ -t_{31}-t_{33}=0 \\ t_{32}+t_{33}=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_{31}+t_{32}=0 \\ t_{32}-t_{33}=0 \\ t_{32}+t_{33}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t_{31}+t_{32}=0 \\ t_{32}=t_{33} \\ t_{32}+t_{33}=1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t_{31}=-t_{32} \\ t_{32}=t_{33} \\ t_{33}+t_{33}=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_{31}=-t_{32} \\ t_{32}=1/2 \\ t_{33}=1/2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_{31}=-1/2 \\ t_{32}=1/2 \\ t_{33}=1/2 \end{cases}$$

Будући да су добијени сви матрични елементи, матрица преласка у апсолутном базису гласи

$$\mathscr{T}=\left[\hat{T}\right]_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}}=\begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

(б) У базису $\{|u_1\rangle,|u_2\rangle,|u_3\rangle\}$ матрицом преласка (добијеном за апсолутни базис) делује се на векторе датог базиса, па се тако добијени ликови представе као линеарне комбинације вектора горњег базиса, према основној формули репрезентовања. Прво се тако напише лик првог вектора

$$\hat{T}|u_1\rangle = \alpha|u_1\rangle + \beta|u_2\rangle + \gamma|u_3\rangle \longrightarrow \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \alpha\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \gamma\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha+\beta \\ \alpha+\gamma \\ \beta+\gamma \end{bmatrix} \Leftrightarrow \underline{\begin{cases} \alpha+\beta=1 \\ \alpha+\gamma=0 \\ \beta+\gamma=0 \end{cases}} \Leftrightarrow \underline{\begin{cases} \alpha+\beta=1 \\ \alpha=-\gamma \\ \beta=-\gamma \end{cases}} \Rightarrow \underline{\begin{cases} -2\gamma=1 \\ \alpha=-\gamma \\ \beta=-\gamma \end{cases}} \Leftrightarrow \underline{\begin{cases} \gamma=-1/2 \\ \alpha=1/2 \\ \beta=1/2 \end{cases}}$$

те је онда

$$\hat{T}|u_1\rangle = \frac{1}{2}|u_1\rangle + \frac{1}{2}|u_2\rangle - \frac{1}{2}|u_3\rangle .$$

Потом се лик другог вектора дâ као линеарна комбинација

$$\hat{T}|u_2\rangle = \alpha'|u_1\rangle + \beta'|u_2\rangle + \gamma'|u_3\rangle \longrightarrow \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \alpha'\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta'\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \gamma'\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha'+\beta' \\ \alpha'+\gamma' \\ \beta'+\gamma' \end{bmatrix} \Leftrightarrow \underline{\begin{cases} \alpha'+\beta'=1 \\ \alpha'+\gamma'=1 \\ \beta'+\gamma'=0 \end{cases}} \Leftrightarrow \underline{\begin{cases} 2\alpha'+\beta'+\gamma'=2 \\ \gamma'=1-\alpha' \\ \beta'+\gamma'=0 \end{cases}} \Rightarrow \underline{\begin{cases} 2\alpha'=2 \\ \gamma'=1-\alpha' \\ \beta'=-\gamma' \end{cases}} \Leftrightarrow \underline{\begin{cases} \alpha'=1 \\ \gamma'=0 \\ \beta'=0 \end{cases}}$$

па је

$$\hat{T}|u_2\rangle = 1|u_1\rangle + 0|u_2\rangle + 0|u_3\rangle .$$

Затим се напише линеарна комбинација лика трећег вектора

$$\hat{T}|u_3\rangle = \alpha''|u_1\rangle + \beta''|u_2\rangle + \gamma''|u_3\rangle \longrightarrow \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \alpha''\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta''\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \gamma''\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha''+\beta'' \\ \alpha''+\gamma'' \\ \beta''+\gamma'' \end{bmatrix} \Leftrightarrow \underline{\begin{cases} \alpha''+\beta''=1 \\ \alpha''+\gamma''=1 \\ \beta''+\gamma''=1 \end{cases}} \Leftrightarrow \underline{\begin{cases} \alpha''+\beta''=1 \\ \gamma''=1-\alpha'' \\ \gamma''=1-\beta'' \end{cases}} \Rightarrow \underline{\begin{cases} 2\alpha''=1 \\ \gamma''=1-\alpha'' \\ \beta''=\alpha'' \end{cases}} \Leftrightarrow \underline{\begin{cases} \alpha''=1/2 \\ \gamma''=1/2 \\ \beta''=1/2 \end{cases}}$$

чиме се добија следећи облик треће формуле репрезентовања

$$\hat{T}|u_3\rangle = \frac{1}{2}|u_1\rangle + \frac{1}{2}|u_2\rangle + \frac{1}{2}|u_3\rangle .$$

Стога матрица којом се представља оператор преласка у базису $\{|u_1\rangle, |u_2\rangle, |u_3\rangle\}$ има облик

$$\left[\hat{T}\right]_{\{|u_i\rangle\}} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ -1/2 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(в) У базису $\{|v_1\rangle, |v_2\rangle, |v_3\rangle\}$ такође се, као и у претходном случају, делује матрицом преласка (датом у апсолутном базису) на векторе овог базиса, и тако добијени ликови напишу се као линеарне комбинације вектора овог базиса, према основној формули репрезентовања. Наравно, почиње се са ликом првог вектора

$$\hat{T}|v_1\rangle = \alpha|v_1\rangle + \beta|v_2\rangle + \gamma|v_3\rangle \longrightarrow \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \alpha\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \gamma\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha+\beta+\gamma \\ \beta+\gamma \\ \gamma \end{bmatrix} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} \alpha+\beta+\gamma = 1/2 \\ \beta+\gamma = 0 \\ \underline{\gamma = -1/2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} \alpha = 1/2 \\ \beta = -\gamma \\ \underline{\gamma = -1/2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} \alpha = 1/2 \\ \beta = 1/2 \\ \underline{\gamma = -1/2} \end{array}\right.$$

чија је линеарна комбинација иста као и у претходном случају

$$\hat{T}|v_1\rangle = \frac{1}{2}|v_1\rangle + \frac{1}{2}|v_2\rangle - \frac{1}{2}|v_3\rangle .$$

Сада се лик другог вектора датог базиса напише као линеарна комбинација

$$\hat{T}|v_2\rangle = \alpha'|v_1\rangle + \beta'|v_2\rangle + \gamma'|v_3\rangle \longrightarrow \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \alpha'\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta'\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \gamma'\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha'+\beta'+\gamma' \\ \beta'+\gamma' \\ \gamma' \end{bmatrix} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} \alpha'+\beta'+\gamma' = 1 \\ \beta'+\gamma' = 0 \\ \underline{\gamma' = 0} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} \alpha' = 1 \\ \beta' = -\gamma' \\ \underline{\gamma' = 0} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} \alpha' = 1 \\ \beta' = 0 \\ \underline{\gamma' = 0} \end{array}\right.$$

која је опет једнака као и у претходном случају

$$\hat{T}|v_2\rangle = 1|v_1\rangle + 0|v_2\rangle + 0|v_3\rangle .$$

На крају се пише линеарна комбинација лика трећег вектора

$$\hat{T}|v_3\rangle = \alpha''|v_1\rangle + \beta''|v_2\rangle + \gamma''|v_3\rangle \longrightarrow \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \alpha''\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta''\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \gamma''\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha''+\beta''+\gamma'' \\ \beta''+\gamma'' \\ \gamma'' \end{bmatrix} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} \alpha''+\beta''+\gamma'' = 3/2 \\ \beta''+\gamma'' = 1 \\ \underline{\gamma'' = 1/2} \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} \alpha'' = 3/2 - 1 \\ \beta'' = 1-\gamma'' \\ \underline{\gamma'' = 1/2} \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} \alpha'' = 1/2 \\ \beta'' = 1/2 \\ \underline{\gamma'' = 1/2} \end{array}\right.$$

такође једнака оној из претходног случаја

$$\hat{T}|v_3\rangle = \frac{1}{2}|v_1\rangle + \frac{1}{2}|v_2\rangle + \frac{1}{2}|v_3\rangle .$$

Значи да је матрица којом се представља оператор у базису $\{|v_1\rangle, |v_2\rangle, |v_3\rangle\}$ једнака оној добијеној у претходном случају

$$\left[\hat{T}\right]_{\{|v_i\rangle\}} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ -1/2 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(9.4) За ниже наведене базисе у векторском простору $\mathbb{R}^n$ одредити матрицу преласка $\mathscr{T}$ из првог у други базис, као и матрицу преласка ρ из другог у први базис. Потом показати да су те матрице *инверзне* међусобно: $\rho = \mathscr{T}^{-1}$. Такође показати да за било који вектор $|v\rangle$ важи да је

$$\big[|v\rangle\big]_{\{|v_i\rangle\}} = \rho\big[|v\rangle\big]_{\{|e_i\rangle\}} = \mathscr{T}^{-1}\big[|v\rangle\big]_{\{|e_i\rangle\}}.$$

Уз то, показати да важе следећи изрази за наведене операторе $\hat{A}$ и $\hat{B}$

$$\big[\hat{A}\big]_{\{|v_i\rangle\}} = \mathscr{T}^{-1}\big[\hat{A}\big]_{\{|e_i\rangle\}}\mathscr{T}, \quad \big[\hat{B}\big]_{\{|v_i\rangle\}} = \mathscr{T}^{-1}\big[\hat{B}\big]_{\{|e_i\rangle\}}\mathscr{T}.$$

(а) $\begin{matrix}|e_1\rangle = (1,0)\\ |e_2\rangle = (0,1)\end{matrix}, \begin{matrix}|v_1\rangle = (1,1)\\ |v_2\rangle = (1,2)\end{matrix}, \ \hat{A}(\xi_1,\xi_2) = (\xi_1, -\xi_2)$;

(б) $\begin{matrix}|e_1\rangle = (1,0)\\ |e_2\rangle = (0,1)\end{matrix}, \begin{matrix}|v_1\rangle = (1,3)\\ |v_2\rangle = (2,5)\end{matrix}, \begin{matrix}\hat{A}(\xi_1,\xi_2) = (2\xi_2, 3\xi_1 - \xi_2)\\ \hat{B}(\xi_1,\xi_2) = (3\xi_1 - 4\xi_2, \xi_1 + 5\xi_2)\end{matrix}$;

(в) $\begin{matrix}|e_1\rangle = (1,0,0)\\ |e_2\rangle = (0,1,0)\\ |e_3\rangle = (0,0,1)\end{matrix}, \begin{matrix}|v_1\rangle = (1,1,1)\\ |v_2\rangle = (1,1,0)\\ |v_3\rangle = (1,0,0)\end{matrix}, \begin{matrix}\hat{A}(\xi_1,\xi_2,\xi_3) = (2\xi_1 - 3\xi_2 + 4\xi_3, 5\xi_1 - 3\xi_2 + 2\xi_3, 4\xi_1 + 7\xi_2)\\ \hat{B}(\xi_1,\xi_2,\xi_3) = (2\xi_1 + \xi_3, \xi_1 - 4\xi_2, 3\xi_1)\end{matrix}$.

(а) Матрица преласка из првог у други базис може се одредити у матричном простору, у коме су дати вектори представљени матрицама-колонама а оператори квадратним матрицама.

Пресликавања дата у поставци задатка

$$|e_1\rangle \xrightarrow{\hat{T}} |v_1\rangle$$
$$|e_2\rangle \xrightarrow{\hat{T}} |v_2\rangle$$

могу да се напишу на следећи начин

$$|v_1\rangle = \hat{T}|e_1\rangle$$
$$|v_2\rangle = \hat{T}|e_2\rangle$$

што у матричном простору поприма облик

$$\underline{\begin{cases}\big[|v_1\rangle\big]_{\{|e_i\rangle\}} = \big[\hat{T}\big]_{\{|e_i\rangle\}}\big[|e_1\rangle\big]_{\{|e_i\rangle\}}\\ \big[|v_2\rangle\big]_{\{|e_i\rangle\}} = \big[\hat{T}\big]_{\{|e_i\rangle\}}\big[|e_2\rangle\big]_{\{|e_i\rangle\}}\end{cases}} \Leftrightarrow \underline{\begin{cases}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}t_{11} & t_{12}\\ t_{21} & t_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\\ \begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}t_{11} & t_{12}\\ t_{21} & t_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\end{cases}} \Leftrightarrow \underline{\begin{cases}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}t_{11}\\ t_{21}\end{bmatrix}\\ \begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}t_{12}\\ t_{22}\end{bmatrix}\end{cases}}$$

Како су матрични елементи $t_{11} = 1$, $t_{12} = 1$, $t_{21} = 1$ и $t_{22} = 2$, тражена матрица преласка гласи

$$\mathscr{T} = \big[\hat{T}\big]_{\{|e_i\rangle\}} = \begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}.$$

Слично се поступа и са матрицом преласка из другог у први базис. Пресликавања дата у поставци задатка

$$|v_1\rangle \xrightarrow{\hat{\rho}} |\mathrm{e}_1\rangle$$
$$|v_2\rangle \xrightarrow{\hat{\rho}} |\mathrm{e}_2\rangle$$

могу да се напишу као

$$|\mathrm{e}_1\rangle = \hat{\rho}|v_1\rangle$$
$$|\mathrm{e}_2\rangle = \hat{\rho}|v_2\rangle$$

а ово у матричном простору поприма облик

$$\begin{cases} \big[|\mathrm{e}_1\rangle\big]_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}} = [\hat{\rho}]_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}}\big[|v_1\rangle\big]_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}} \\ \big[|\mathrm{e}_2\rangle\big]_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}} = [\hat{\rho}]_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}}\big[|v_2\rangle\big]_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\rho_{11} & \rho_{12}\\ \rho_{21} & \rho_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\rho_{11} & \rho_{12}\\ \rho_{21} & \rho_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\rho_{11}+\rho_{12}\\ \rho_{21}+\rho_{22}\end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\rho_{11}+2\rho_{12}\\ \rho_{21}+2\rho_{22}\end{bmatrix} \end{cases}$$

Овако су добијена два система једначина

$$\begin{cases} \rho_{11}+\rho_{12}=1 \\ \rho_{21}+\rho_{22}=0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} \rho_{11}+2\rho_{12}=0 \\ \rho_{21}+2\rho_{22}=1 \end{cases}.$$

Матрични елементи прве врсте тражене матрице добијају се из првих једначина горњих система

$$\begin{cases} \rho_{11}+\rho_{12}=1 \\ \rho_{11}+2\rho_{12}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \rho_{11}+\rho_{12}=1 \\ \rho_{11}=-2\rho_{12} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2\rho_{12}+\rho_{12}=1 \\ \rho_{11}=-2\rho_{12} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \rho_{12}=-1 \\ \rho_{11}=-2\rho_{12} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \rho_{12}=-1 \\ \rho_{11}=2 \end{cases}$$

док се матрични елементи друге врсте тражене матрице добијају из других једначина горњих система једначина

$$\begin{cases} \rho_{21}+\rho_{22}=0 \\ \rho_{21}+2\rho_{22}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \rho_{21}=-\rho_{22} \\ \rho_{21}+2\rho_{22}=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \rho_{21}=-\rho_{22} \\ -\rho_{22}+2\rho_{22}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \rho_{21}=-\rho_{22} \\ \rho_{22}=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \rho_{21}=-1 \\ \rho_{22}=1 \end{cases}$$

те тражена матрица преласка има облик

$$\rho = [\hat{\rho}]_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Да би овако добијене две матрице биле *инверзне* једна другој, њихов матрични производ мора бити једнак јединичној матрици

$$\mathscr{T}\rho = \begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\cdot 2+1\cdot(-1) & 1\cdot(-1)+1\cdot 1\\ 1\cdot 2+2\cdot(-1) & 1\cdot(-1)+2\cdot 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2-1 & -1+1\\ 2-2 & -1+2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} = \mathscr{I}$$

а то мора важити и када се оне помноже обрнутим редоследом

$$\rho\mathscr{T} = \begin{bmatrix}2 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\cdot 1+(-1)\cdot 1 & 2\cdot 1+(-1)\cdot 2\\ (-1)\cdot 1+1\cdot 1 & (-1)\cdot 1+1\cdot 2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2-1 & 2-2\\ -1+1 & -1+2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} = \mathscr{I}$$

што је очигледно испуњено. Значи да је заиста $\rho = \mathscr{T}^{-1}$, а такође је и $\mathscr{T} = \rho^{-1}$.

Сада треба проверити да ли за произвољни вектор $|v\rangle$ важи да је

$$\left[|v\rangle\right]_{\{|v_i\rangle\}} = \mathscr{T}^{-1}\left[|v\rangle\right]_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}}.$$

Произвољни вектор $|v\rangle = (\xi_1, \xi_2)$ у матричном простору представља се матрицом-колоном

$$|v\rangle = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix}$$

која уствари представља тај вектор у апсолутном базису јер је

$$|v\rangle = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \xi_2 \end{bmatrix} = \xi_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \xi_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \xi_1 \left[|\mathrm{e}_1\rangle\right]_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}} + \xi_2 \left[|\mathrm{e}_2\rangle\right]_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}} = \left[|v\rangle\right]_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}}.$$

Исти вектор представља се у другом базису као

$$\left[|v\rangle\right]_{\{|v_i\rangle\}} = \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{bmatrix}_{\{|v_i\rangle\}} = \eta_1 \left[|v_1\rangle\right]_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}} + \eta_2 \left[|v_2\rangle\right]_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}} = \eta_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \eta_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \eta_1 + \eta_2 \\ \eta_1 + 2\eta_2 \end{bmatrix}_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}}$$

при чему ова матрица мора бити једнака матрици истог вектора у апсолутном базису. Следи

$$\begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \eta_1 + \eta_2 \\ \eta_1 + 2\eta_2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \underline{\begin{cases} \xi_1 = \eta_1 + \eta_2 \\ \xi_2 = \eta_1 + 2\eta_2 \end{cases}} \Leftrightarrow \underline{\begin{cases} \eta_1 = \xi_1 - \eta_2 \\ \xi_2 = \eta_1 + 2\eta_2 \end{cases}} \Rightarrow \underline{\begin{cases} \eta_1 = \xi_1 - \eta_2 \\ \xi_2 = \xi_1 - \eta_2 + 2\eta_2 \end{cases}}$$

$$\Leftrightarrow \underline{\begin{cases} \eta_1 = \xi_1 - \eta_2 \\ \xi_2 = \xi_1 + \eta_2 \end{cases}} \Leftrightarrow \underline{\begin{cases} \eta_1 = \xi_1 - \eta_2 \\ \eta_2 = -\xi_1 + \xi_2 \end{cases}} \Rightarrow \underline{\begin{cases} \eta_1 = \xi_1 + \xi_1 - \xi_2 \\ \eta_2 = -\xi_1 + \xi_2 \end{cases}} \Leftrightarrow \underline{\begin{cases} \eta_1 = 2\xi_1 - \xi_2 \\ \eta_2 = -\xi_1 + \xi_2 \end{cases}}$$

те је онда

$$\left[|v\rangle\right]_{\{|v_i\rangle\}} = \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{bmatrix}_{\{|v_i\rangle\}} = \begin{bmatrix} 2\xi_1 - \xi_2 \\ -\xi_1 + \xi_2 \end{bmatrix}_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}}.$$

Сада треба проверити да ли се деловањем матрице оператора $\hat{\rho}$ на матрицу-колону произвољног вектора у апсолутном базису добија горњи вектор у задатом базису. Следи

$$\left[\hat{\rho}\right]_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}} \left[|v\rangle\right]_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\xi_1 - \xi_2 \\ -\xi_1 + \xi_2 \end{bmatrix}$$

што је очигледно једнако горњем вектору, те је показано да стварно важи

$$\left[|v\rangle\right]_{\{|v_i\rangle\}} = \left[\hat{\rho}\right]_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}} \left[|v\rangle\right]_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}}.$$

Још треба добити матрицу којом се задати оператор $\hat{A}(\xi_1, \xi_2) = (\xi_1, -\xi_2)$ представља у апсолутном базису, што се постиже његовим деловањем на оба вектора апсолутног базиса, а затим развијањем тако добијених ликова по векторима апсолутног базиса

$$\underline{\begin{cases} \hat{A}(1,0) = (1,0) = 1\cdot(1,0) + 0\cdot(0,1) = 1|\mathrm{e}_1\rangle + 0|\mathrm{e}_2\rangle \\ \hat{A}(0,1) = (0,-1) = 0\cdot(1,0) + (-1)\cdot(0,1) = 0|\mathrm{e}_1\rangle + (-1)|\mathrm{e}_2\rangle \end{cases}} \Rightarrow \mathscr{A} = \left[\hat{A}\right]_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Треба добити и матрицу оператора $\hat{A}(\xi_1,\xi_2)=(\xi_1,-\xi_2)$ у задатом базису, тако што се њиме делује на векторе задатог базиса. Потом се тако добијени ликови, у складу са основном формулом репрезентовања, запишу као линеарне комбинације вектора задатог базиса

$$\hat{A}\left|v_1\right\rangle=\hat{A}(1,1)=(1,-1)=\alpha\left|v_1\right\rangle+\beta\left|v_2\right\rangle=\alpha(1,1)+\beta(1,2)=(\alpha+\beta,\alpha+2\beta)$$
$$\hat{A}\left|v_2\right\rangle=\hat{A}(1,2)=(1,-2)=\gamma\left|v_1\right\rangle+\delta\left|v_2\right\rangle=\gamma(1,1)+\delta(1,2)=(\gamma+\delta,\gamma+2\delta)$$

или, једноставније

$$(1,-1)=(\alpha+\beta,\alpha+2\beta)$$
$$(1,-2)=(\gamma+\delta,\gamma+2\delta)$$

Из прве једнакости уређених парова добија се следећи систем једначина

$$\begin{cases}\alpha+\beta=1\\ \alpha+2\beta=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=1-\beta\\ \alpha+2\beta=-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\alpha=1-\beta\\ 1-\beta+2\beta=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=1-\beta\\ 1+\beta=-1\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=1-\beta\\ \beta=-2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\alpha=3\\ \beta=-2\end{cases}$$

док се из друге једнакости добија други систем једначина

$$\begin{cases}\gamma+\delta=1\\ \gamma+2\delta=-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\gamma=1-\delta\\ \gamma+2\delta=-2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\gamma=1-\delta\\ 1-\delta+2\delta=-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\gamma=1-\delta\\ 1+\delta=-2\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}\gamma=1-\delta\\ \delta=-3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\gamma=4\\ \delta=-3\end{cases}$$

Пошто су коефицијенти линеарне комбинације вектора задатог базиса коначно добијени, матрица задатог оператора у датом базису добија се овако

$$\begin{cases}\hat{A}\left|v_1\right\rangle=\alpha\left|v_1\right\rangle+\beta\left|v_2\right\rangle=3\left|v_1\right\rangle+(-2)\left|v_2\right\rangle\\ \hat{A}\left|v_2\right\rangle=\gamma\left|v_1\right\rangle+\delta\left|v_2\right\rangle=4\left|v_1\right\rangle+(-3)\left|v_2\right\rangle\end{cases}\Rightarrow\left[\hat{A}\right]_{\{|v_i\rangle\}}=\begin{bmatrix}3 & 4\\ -2 & -3\end{bmatrix}.$$

Преостало је још да се провери важење *трансформације сличности*

$$\left[\hat{A}\right]_{\{|v_i\rangle\}}=\mathscr{T}^{-1}\left[\hat{A}\right]_{\{|e_i\rangle\}}\mathscr{T}.$$

Након што се помноже три матрице са десне стране добија се

$$\mathscr{T}^{-1}\left[\hat{A}\right]_{\{|e_i\rangle\}}\mathscr{T}=\begin{bmatrix}2 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\cdot1+(-1)\cdot0 & 2\cdot0+(-1)\cdot(-1)\\ (-1)\cdot1+1\cdot0 & (-1)\cdot0+1\cdot(-1)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}2 & 1\\ -1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\cdot1+1\cdot1 & 2\cdot1+1\cdot2\\ (-1)\cdot1+(-1)\cdot1 & (-1)\cdot1+(-1)\cdot2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & 4\\ -2 & -3\end{bmatrix}$$

што је очигледно једнако

$$\left[\hat{A}\right]_{\{|v_i\rangle\}}=\begin{bmatrix}3 & 4\\ -2 & -3\end{bmatrix}.$$

(б) И у овом случају поступа се исто: матрица преласка из првог у други базис биће добијена у матричном простору, у коме се вектори представљају матрицама-колонама а оператори квадратним матрицама.

Пресликавања дата у поставци задатка

$$\left|\mathrm{e}_1\right\rangle \xrightarrow{\hat{T}} \left|v_1\right\rangle$$
$$\left|\mathrm{e}_2\right\rangle \xrightarrow{\hat{T}} \left|v_2\right\rangle$$

пишу се на следећи начин

$$\left|v_1\right\rangle = \hat{T}\left|\mathrm{e}_1\right\rangle$$
$$\left|v_2\right\rangle = \hat{T}\left|\mathrm{e}_2\right\rangle$$

или, у матричном простору

$$\begin{cases} \left[\left|v_1\right\rangle\right]_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}} = \left[\hat{T}\right]_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}}\left[\left|\mathrm{e}_1\right\rangle\right]_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}} \\ \left[\left|v_2\right\rangle\right]_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}} = \left[\hat{T}\right]_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}}\left[\left|\mathrm{e}_2\right\rangle\right]_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}t_{11} & t_{12}\\ t_{21} & t_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix}2\\5\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}t_{11} & t_{12}\\ t_{21} & t_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}t_{11}\\ t_{21}\end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix}2\\5\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}t_{12}\\ t_{22}\end{bmatrix} \end{cases}$$

Пошто су матрични елементи $t_{11}=1$, $t_{12}=2$, $t_{21}=3$ и $t_{22}=5$, тражена матрица преласка је

$$\mathscr{T} = \left[\hat{T}\right]_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}} = \begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 5\end{bmatrix}.$$

Што се тиче матрице преласка из другог у први базис, пресликавања из поставке задатка

$$\left|v_1\right\rangle \xrightarrow{\hat{\rho}} \left|\mathrm{e}_1\right\rangle$$
$$\left|v_2\right\rangle \xrightarrow{\hat{\rho}} \left|\mathrm{e}_2\right\rangle$$

могу се дати као

$$\left|\mathrm{e}_1\right\rangle = \hat{\rho}\left|v_1\right\rangle$$
$$\left|\mathrm{e}_2\right\rangle = \hat{\rho}\left|v_2\right\rangle$$

што матрично записано постаје

$$\begin{cases} \left[\left|\mathrm{e}_1\right\rangle\right]_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}} = \left[\hat{\rho}\right]_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}}\left[\left|v_1\right\rangle\right]_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}} \\ \left[\left|\mathrm{e}_2\right\rangle\right]_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}} = \left[\hat{\rho}\right]_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}}\left[\left|v_2\right\rangle\right]_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\rho_{11} & \rho_{12}\\ \rho_{21} & \rho_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\rho_{11} & \rho_{12}\\ \rho_{21} & \rho_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\5\end{bmatrix} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\rho_{11}+3\rho_{12}\\ \rho_{21}+3\rho_{22}\end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\rho_{11}+5\rho_{12}\\ 2\rho_{21}+5\rho_{22}\end{bmatrix} \end{cases}$$

одакле следе два система једначина

$$\begin{cases} \rho_{11}+3\rho_{12}=1 \\ \rho_{21}+3\rho_{22}=0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} 2\rho_{11}+5\rho_{12}=0 \\ 2\rho_{21}+5\rho_{22}=1 \end{cases}.$$

Матрични елементи прве врсте жељене матрице добијају се из првих једначина горња два система

$$\begin{cases}\rho_{11}+3\rho_{12}=1\\2\rho_{11}+5\rho_{12}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\rho_{11}=1-3\rho_{12}\\2\rho_{11}+5\rho_{12}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\rho_{11}=1-3\rho_{12}\\2(1-3\rho_{12})+5\rho_{12}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\rho_{11}=1-3\rho_{12}\\2-6\rho_{12}+5\rho_{12}=0\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\rho_{11}=1-3\rho_{12}\\2-\rho_{12}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\rho_{11}=1-3\rho_{12}\\\rho_{12}=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\rho_{11}=1-6\\\rho_{12}=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\rho_{11}=-5\\\rho_{12}=2\end{cases}$$

док се матрични елементи друге врсте тражене матрице добијају из других једначина горњих система једначина

$$\begin{cases}\rho_{21}+3\rho_{22}=0\\2\rho_{21}+5\rho_{22}=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\rho_{21}=-3\rho_{22}\\2\rho_{21}+5\rho_{22}=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\rho_{21}=-3\rho_{22}\\2(-3\rho_{22})+5\rho_{22}=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\rho_{21}=-3\rho_{22}\\(-6+5)\rho_{22}=1\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\rho_{21}=-3\rho_{22}\\-\rho_{22}=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\rho_{21}=-3\rho_{22}\\\rho_{22}=-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\rho_{21}=3\\\rho_{22}=-1\end{cases}$$

те тражена матрица преласка има облик

$$\rho=[\hat{\rho}]_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}}=\begin{bmatrix}-5&2\\3&-1\end{bmatrix}.$$

Добијене две матрице *инверзне* су једна другој, ако је њихов матрични производ једнак

$$\mathscr{T}\rho=\begin{bmatrix}1&2\\3&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-5&2\\3&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\cdot(-5)+2\cdot3&1\cdot2+2\cdot(-1)\\3\cdot(-5)+5\cdot3&3\cdot2+5\cdot(-1)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-5+6&2-2\\-15+15&6-5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}=\mathscr{I}\ ;$$

исто мора да важи и када се матрице помноже обрнутим редоследом

$$\rho\mathscr{T}=\begin{bmatrix}-5&2\\3&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2\\3&5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(-5)\cdot1+2\cdot3&(-5)\cdot2+2\cdot5\\3\cdot1+(-1)\cdot3&3\cdot2+(-1)\cdot5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-5+6&2-2\\3-3&6-5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}=\mathscr{I}$$

што је очигледно испуњено. Значи да је заиста $\rho=\mathscr{T}^{-1}$, а такође је и $\mathscr{T}=\rho^{-1}$.

Сада треба проверити да ли за произвољни вектор $|v\rangle$ важи да је

$$\big[|v\rangle\big]_{\{|v_i\rangle\}}=\mathscr{T}^{-1}\big[|v\rangle\big]_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}}.$$

Произвољни вектор $|v\rangle=(\xi_1,\xi_2)$ у матричном простору представља се матрицом-колоном

$$|v\rangle=\begin{bmatrix}\xi_1\\\xi_2\end{bmatrix}$$

која уствари представља тај вектор у апсолутном базису јер је

$$|v\rangle=\begin{bmatrix}\xi_1\\\xi_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\xi_1\\0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\\xi_2\end{bmatrix}=\xi_1\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}+\xi_2\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}=\xi_1\big[|\mathrm{e}_1\rangle\big]_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}}+\xi_2\big[|\mathrm{e}_2\rangle\big]_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}}=\big[|v\rangle\big]_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}}.$$

Исти вектор биће представљен у другом базису као

$$\big[|v\rangle\big]_{\{|v_i\rangle\}}=\begin{bmatrix}\eta_1\\ \eta_2\end{bmatrix}_{\{|v_i\rangle\}}=\eta_1\big[|v_1\rangle\big]_{\{|e_i\rangle\}}+\eta_2\big[|v_2\rangle\big]_{\{|e_i\rangle\}}=\eta_1\begin{bmatrix}1\\ 3\end{bmatrix}+\eta_2\begin{bmatrix}2\\ 5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\eta_1+2\eta_2\\ 3\eta_1+5\eta_2\end{bmatrix}_{\{|e_i\rangle\}}$$

при чему ова матрица мора бити једнака матрици истог вектора у апсолутном базису, па следи

$$\begin{bmatrix}\xi_1\\ \xi_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\eta_1+2\eta_2\\ 3\eta_1+5\eta_2\end{bmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}\xi_1=\eta_1+2\eta_2\\ \xi_2=3\eta_1+5\eta_2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\eta_1=\xi_1-2\eta_2\\ \xi_2=3\eta_1+5\eta_2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\eta_1=\xi_1-2\eta_2\\ \xi_2=3\xi_1-6\eta_2+5\eta_2\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\eta_1=\xi_1-2\eta_2\\ \xi_2=3\xi_1-\eta_2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\eta_1=\xi_1-2\eta_2\\ \eta_2=3\xi_1-\xi_2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\eta_1=\xi_1-6\xi_1+2\xi_2\\ \eta_2=3\xi_1-\xi_2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\eta_1=-5\xi_1+2\xi_2\\ \eta_2=3\xi_1-\xi_2\end{cases}$$

те је онда

$$\big[|v\rangle\big]_{\{|v_i\rangle\}}=\begin{bmatrix}\eta_1\\ \eta_2\end{bmatrix}_{\{|v_i\rangle\}}=\begin{bmatrix}-5\xi_1+2\xi_2\\ 3\xi_1-\xi_2\end{bmatrix}_{\{|e_i\rangle\}}.$$

Сада треба проверити да ли се деловањем матрице оператора $\hat{\rho}$ на матрицу-колону произвољног вектора у апсолутном базису добија горњи вектор у задатом базису. Следи

$$[\hat{\rho}]_{\{|e_i\rangle\}}\big[|v\rangle\big]_{\{|e_i\rangle\}}=\begin{bmatrix}-5 & 2\\ 3 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\xi_1\\ \xi_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-5\xi_1+2\xi_2\\ 3\xi_1-\xi_2\end{bmatrix}$$

што је једнако горњем вектору, чиме је показано да је заиста

$$\big[|v\rangle\big]_{\{|v_i\rangle\}}=[\hat{\rho}]_{\{|e_i\rangle\}}\big[|v\rangle\big]_{\{|e_i\rangle\}}.$$

Матрица којом се задати оператор $\hat{A}(\xi_1,\xi_2)=(2\xi_2,3\xi_1-\xi_2)$ представља у апсолутном базису добија се деловањем задатог оператора на оба вектора апсолутног базиса. Потом се тако добијени ликови пишу као линеарне комбинације вектора апсолутног базиса

$$\begin{cases}\hat{A}(1,0)=(0,3)=0\cdot(1,0)+3\cdot(0,1)=0|e_1\rangle+3|e_2\rangle\\ \hat{A}(0,1)=(2,-1)=2\cdot(1,0)+(-1)\cdot(0,1)=2|e_1\rangle+(-1)|e_2\rangle\end{cases}\Rightarrow\mathscr{A}=\big[\hat{A}\big]_{\{|e_i\rangle\}}=\begin{bmatrix}0 & 2\\ 3 & -1\end{bmatrix}.$$

Поступак је потпуно исти за други задати оператор $\hat{B}(\xi_1,\xi_2)=(3\xi_1-4\xi_2,\xi_1+5\xi_2)$

$$\begin{cases}\hat{B}(1,0)=(3,1)=3\cdot(1,0)+1\cdot(0,1)=3|e_1\rangle+1|e_2\rangle\\ \hat{B}(0,1)=(-4,5)=(-4)\cdot(1,0)+5\cdot(0,1)=(-4)|e_1\rangle+5|e_2\rangle\end{cases}\Rightarrow\mathscr{B}=\big[\hat{B}\big]_{\{|e_i\rangle\}}=\begin{bmatrix}3 & -4\\ 1 & 5\end{bmatrix}.$$

Сада се матрица оператора $\hat{A}(\xi_1,\xi_2)=(2\xi_2,3\xi_1-\xi_2)$ у датом базису добија његовим деловањем на векторе задатог базиса. Потом се тако добијени ликови, у складу са основном формулом репрезентовања, запишу као линеарне комбинације вектора задатог базиса

$$\hat{A}|v_1\rangle=\hat{A}(1,3)=(6,0)=\alpha|v_1\rangle+\beta|v_2\rangle=\alpha(1,3)+\beta(2,5)=(\alpha+2\beta,3\alpha+5\beta)$$

$$\hat{A}|v_2\rangle=\hat{A}(2,5)=(10,1)=\gamma|v_1\rangle+\delta|v_2\rangle=\gamma(1,3)+\delta(2,5)=(\gamma+2\delta,3\gamma+5\delta)$$

или, једноставније

$$(6,0) = (\alpha + 2\beta, 3\alpha + 5\beta)$$
$$(10,1) = (\gamma + 2\delta, 3\gamma + 5\delta)$$

Из прве једнакости уређених парова добија се следећи систем једначина

$$\begin{cases}\alpha + 2\beta = 6\\ 3\alpha + 5\beta = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha = 6 - 2\beta\\ 3\alpha + 5\beta = 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\alpha = 6 - 2\beta\\ 3(6 - 2\beta) + 5\beta = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha = 6 - 2\beta\\ 18 - 6\beta + 5\beta = 0\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases}\alpha = 6 - 2\beta\\ \beta = 18\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\alpha = 6 - 36\\ \beta = 18\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha = -30\\ \beta = 18\end{cases}$$

а из друге једнакости добија систем једначина

$$\begin{cases}\gamma + 2\delta = 10\\ 3\gamma + 5\delta = 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\gamma = 10 - 2\delta\\ 3\gamma + 5\delta = 1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\gamma = 10 - 2\delta\\ 30 - 6\delta + 5\delta = 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\gamma = 10 - 2\delta\\ 30 - \delta = 1\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases}\gamma = 10 - 2\delta\\ \delta = 29\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\gamma = 10 - 58\\ \delta = 29\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\gamma = -48\\ \delta = 29\end{cases}$$

Матрица првог датог оператора у задатом базису добија се када се добијени коефицијенти линеарне комбинације запишу на следећи начин

$$\begin{cases}\hat{A}|v_1\rangle = \alpha|v_1\rangle + \beta|v_2\rangle = (-30)|v_1\rangle + 18|v_2\rangle\\ \hat{A}|v_2\rangle = \gamma|v_1\rangle + \delta|v_2\rangle = (-48)|v_1\rangle + 29|v_2\rangle\end{cases} \Rightarrow \left[\hat{A}\right]_{\{|v_i\rangle\}} = \begin{bmatrix}-30 & -48\\ 18 & 29\end{bmatrix}.$$

Треба такође добити матрицу оператора $\hat{B}(\xi_1, \xi_2) = (3\xi_1 - 4\xi_2, \xi_1 + 5\xi_2)$ у задатом базису његовим деловањем на векторе задатог базиса. Потом се тако добијени ликови, у складу са основном формулом репрезентовања, пишу као линеарне комбинације вектора задатог базиса

$$\hat{B}|v_1\rangle = \hat{B}(1,3) = (-9,16) = \alpha|v_1\rangle + \beta|v_2\rangle = \alpha(1,3) + \beta(2,5) = (\alpha + 2\beta, 3\alpha + 5\beta)$$
$$\hat{B}|v_2\rangle = \hat{B}(2,5) = (-14,27) = \gamma|v_1\rangle + \delta|v_2\rangle = \gamma(1,3) + \delta(2,5) = (\gamma + 2\delta, 3\gamma + 5\delta)$$

или, једноставније

$$(-9,16) = (\alpha + 2\beta, 3\alpha + 5\beta)$$
$$(-14,27) = (\gamma + 2\delta, 3\gamma + 5\delta)$$

Из прве једнакости уређених парова добија се следећи систем једначина

$$\begin{cases}\alpha + 2\beta = -9\\ 3\alpha + 5\beta = 16\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha = -9 - 2\beta\\ 3\alpha + 5\beta = 16\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\alpha = -9 - 2\beta\\ 3(-9 - 2\beta) + 5\beta = 16\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha = -9 - 2\beta\\ -27 - 6\beta + 5\beta = 16\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases}\alpha = -9 - 2\beta\\ \beta = -43\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\alpha = -9 + 86\\ \beta = -43\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha = 77\\ \beta = -43\end{cases}$$

док се из друге једнакости добија систем једначина

$$\begin{cases}\gamma+2\delta=-14\\ 3\gamma+5\delta=27\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\gamma=-14-2\delta\\ 3\gamma+5\delta=27\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\gamma=-14-2\delta\\ -42-6\delta+5\delta=27\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\gamma=-14-2\delta\\ -42-\delta=27\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\gamma=-14-2\delta\\ \delta=-69\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\gamma=-14+138\\ \delta=-69\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\gamma=124\\ \delta=-69\end{cases}$$

Матрица другог датог оператора у задатом базису добија се када се добијени коефицијенти линеарне комбинације запишу као

$$\begin{cases}\hat{B}|v_1\rangle=\alpha|v_1\rangle+\beta|v_2\rangle=77|v_1\rangle-43|v_2\rangle\\ \hat{B}|v_2\rangle=\gamma|v_1\rangle+\delta|v_2\rangle=124|v_1\rangle-69|v_2\rangle\end{cases} \Rightarrow \left[\hat{B}\right]_{\{|v_i\rangle\}}=\begin{bmatrix}77 & 124\\ -43 & -69\end{bmatrix}.$$

Преостало је још да се провери важење *трансформације сличности* за оба оператора

$$\left[\hat{A}\right]_{\{|v_i\rangle\}}=\mathscr{T}^{-1}\left[\hat{A}\right]_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}}\mathscr{T} \quad \text{и} \quad \left[\hat{B}\right]_{\{|v_i\rangle\}}=\mathscr{T}^{-1}\left[\hat{B}\right]_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}}\mathscr{T}.$$

Почиње се са провером трансформације сличности за први оператор

$$\mathscr{T}^{-1}\left[\hat{A}\right]_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}}\mathscr{T}=\begin{bmatrix}-5 & 2\\ 3 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 2\\ 3 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(-5)\cdot 0+2\cdot 3 & (-5)\cdot 2+2\cdot(-1)\\ 3\cdot 0+(-1)\cdot 3 & 3\cdot 2+(-1)\cdot(-1)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 5\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}6 & -12\\ -3 & 7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6\cdot 1+(-12)\cdot 3 & 6\cdot 2+(-12)\cdot 5\\ (-3)\cdot 1+7\cdot 3 & (-3)\cdot 2+7\cdot 5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-30 & -48\\ 18 & 29\end{bmatrix}$$

што је очигледно једнако

$$\left[\hat{A}\right]_{\{|v_i\rangle\}}=\begin{bmatrix}-30 & -48\\ 18 & 29\end{bmatrix}.$$

Потом се проверава трансформација сличности за други оператор

$$\mathscr{T}^{-1}\left[\hat{B}\right]_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}}\mathscr{T}=\begin{bmatrix}-5 & 2\\ 3 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & -4\\ 1 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(-5)\cdot 3+2\cdot 1 & (-5)\cdot(-4)+2\cdot 5\\ 3\cdot 3+(-1)\cdot 1 & 3\cdot(-4)+(-1)\cdot 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 5\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-13 & 30\\ 8 & -17\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(-13)\cdot 1+30\cdot 3 & (-13)\cdot 2+30\cdot 5\\ 8\cdot 1+(-17)\cdot 3 & 8\cdot 2+(-17)\cdot 5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}77 & -124\\ -43 & -69\end{bmatrix}$$

што је свакако једнако

$$\left[\hat{B}\right]_{\{|v_i\rangle\}}=\begin{bmatrix}77 & 124\\ -43 & -69\end{bmatrix}.$$

Очигледно је да важе трансформације сличности за оба оператора.

(в) Поступак примењен у претходна два случаја примењује се и овде: матрица преласка из првог у други базис биће добијена у матричном простору, у коме се вектори представљају матрицама-колонама а оператори квадратним матрицама.

Пресликавања дата у поставци задатка

$$|\mathrm{e}_1\rangle \xrightarrow{\hat{T}} |v_1\rangle$$
$$|\mathrm{e}_2\rangle \xrightarrow{\hat{T}} |v_2\rangle$$
$$|\mathrm{e}_3\rangle \xrightarrow{\hat{T}} |v_3\rangle$$

пишу се на следећи начин

$$|v_1\rangle = \hat{T}|\mathrm{e}_1\rangle$$
$$|v_2\rangle = \hat{T}|\mathrm{e}_2\rangle$$
$$|v_3\rangle = \hat{T}|\mathrm{e}_3\rangle$$

или, у матричном простору

$$\begin{cases} \left[|v_1\rangle\right]_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}} = \left[\hat{T}\right]_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}} \left[|\mathrm{e}_1\rangle\right]_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}} \\ \left[|v_2\rangle\right]_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}} = \left[\hat{T}\right]_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}} \left[|\mathrm{e}_2\rangle\right]_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}} \\ \left[|v_3\rangle\right]_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}} = \left[\hat{T}\right]_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}} \left[|\mathrm{e}_3\rangle\right]_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}t_{11}\\t_{21}\\t_{31}\end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}t_{12}\\t_{22}\\t_{32}\end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}t_{13}\\t_{23}\\t_{33}\end{bmatrix} \end{cases}$$

Пошто су добијени свих девет матричних елемената, тражена матрица преласка гласи

$$\mathscr{T} = \left[\hat{T}\right]_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Што се тиче матрице преласка из другог у први базис, пресликавања из поставке задатка

$$|v_1\rangle \xrightarrow{\hat{\rho}} |\mathrm{e}_1\rangle$$
$$|v_2\rangle \xrightarrow{\hat{\rho}} |\mathrm{e}_2\rangle$$
$$|v_3\rangle \xrightarrow{\hat{\rho}} |\mathrm{e}_3\rangle$$

могу се представити и као

$$|\mathrm{e}_1\rangle = \hat{\rho}|v_1\rangle$$
$$|\mathrm{e}_2\rangle = \hat{\rho}|v_2\rangle$$
$$|\mathrm{e}_3\rangle = \hat{\rho}|v_3\rangle$$

што матрично записано постаје

$$\begin{cases}\left[|\mathrm{e}_1\rangle\right]_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}}=\left[\hat{\rho}\right]_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}}\left[|v_1\rangle\right]_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}}\\ \left[|\mathrm{e}_2\rangle\right]_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}}=\left[\hat{\rho}\right]_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}}\left[|v_2\rangle\right]_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}}\\ \left[|\mathrm{e}_3\rangle\right]_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}}=\left[\hat{\rho}\right]_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}}\left[|v_3\rangle\right]_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\rho_{11}&\rho_{12}&\rho_{13}\\ \rho_{21}&\rho_{22}&\rho_{23}\\ \rho_{31}&\rho_{32}&\rho_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\\ \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\rho_{11}&\rho_{12}&\rho_{13}\\ \rho_{21}&\rho_{22}&\rho_{23}\\ \rho_{31}&\rho_{32}&\rho_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}\\ \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\rho_{11}&\rho_{12}&\rho_{13}\\ \rho_{21}&\rho_{22}&\rho_{23}\\ \rho_{31}&\rho_{32}&\rho_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\rho_{11}+\rho_{12}+\rho_{13}\\ \rho_{21}+\rho_{22}+\rho_{23}\\ \rho_{31}+\rho_{32}+\rho_{33}\end{bmatrix}\\ \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\rho_{11}+\rho_{12}\\ \rho_{21}+\rho_{22}\\ \rho_{31}+\rho_{32}\end{bmatrix}\\ \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\rho_{11}\\ \rho_{21}\\ \rho_{31}\end{bmatrix}\end{cases}$$

одакле следе три система једначина

$$\begin{cases}\rho_{11}+\rho_{12}+\rho_{13}=1\\ \rho_{21}+\rho_{22}+\rho_{23}=0\\ \rho_{31}+\rho_{32}+\rho_{33}=0\end{cases},\ \begin{cases}\rho_{11}+\rho_{12}=0\\ \rho_{21}+\rho_{22}=1\\ \rho_{31}+\rho_{32}=0\end{cases}\ \text{и}\ \begin{cases}\rho_{11}=0\\ \rho_{21}=0\\ \rho_{31}=1\end{cases}.$$

Како је трећи систем већ решен, заменом његових решења у други јасно је да су

$$\begin{cases}\rho_{11}=-\rho_{12}\\ \rho_{21}=1-\rho_{22}\\ \rho_{31}=-\rho_{32}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\rho_{12}=-\rho_{11}\\ \rho_{22}=1-\rho_{21}\\ \rho_{32}=-\rho_{31}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\rho_{12}=0\\ \rho_{22}=1\\ \rho_{32}=-1\end{cases}$$

Заменом израза из другог система једначина у први, одмах се добија да су

$$\begin{cases}\rho_{11}+\rho_{12}+\rho_{13}=1\\ \rho_{21}+\rho_{22}+\rho_{23}=0\\ \rho_{31}+\rho_{32}+\rho_{33}=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\rho_{13}=1-(\rho_{11}+\rho_{12})\\ \rho_{23}=-(\rho_{21}+\rho_{22})\\ \rho_{33}=-(\rho_{31}+\rho_{32})\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\rho_{13}=1\\ \rho_{23}=-1\\ \rho_{33}=0\end{cases}$$

те тражена матрица преласка има облик

$$\rho=\left[\hat{\rho}\right]_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}}=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&-1\\1&-1&0\end{bmatrix}.$$

Две матрице су међусобно *инверзне* ако је њихов матрични производ једнак јединичној матрици

$$\mathscr{T}\rho=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&-1\\1&-1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\cdot0+1\cdot0+1\cdot1 & 1\cdot0+1\cdot1+1\cdot(-1) & 1\cdot1+1\cdot(-1)+1\cdot0\\ 1\cdot0+1\cdot0+0\cdot1 & 1\cdot0+1\cdot1+0\cdot(-1) & 1\cdot1+1\cdot(-1)+0\cdot0\\ 1\cdot0+0\cdot0+0\cdot1 & 1\cdot0+0\cdot1+0\cdot(-1) & 1\cdot1+0\cdot(-1)+0\cdot0\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}0+0+1 & 0+1-1 & 1-1+0\\ 0+0+0 & 0+1+0 & 1-1+0\\ 0+0+0 & 0+0+0 & 1+0+0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\mathscr{I}$$

Исто мора да важи и када се матрице помноже обрнутим редоследом

$$\rho\cdot\mathscr{T}=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&-1\\1&-1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\cdot1+0\cdot1+1\cdot1&0\cdot1+0\cdot1+1\cdot0&0\cdot1+0\cdot0+1\cdot0\\0\cdot1+1\cdot1+(-1)\cdot1&0\cdot1+1\cdot1+(-1)\cdot0&0\cdot1+1\cdot0+(-1)\cdot0\\1\cdot1+(-1)\cdot1+0\cdot1&1\cdot1+(-1)\cdot1+0\cdot0&1\cdot1+(-1)\cdot0+0\cdot0\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}0+0+1&0+0+0&0+0+0\\0+1-1&0+1-1&0+0+0\\1-1+0&1-1+0&1+0+0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\mathscr{I}$$

што је очито испуњено. Дакле, заиста је $\rho=\mathscr{T}^{-1}$, а такође је и $\mathscr{T}=\rho^{-1}$.

Да ли за произвољни вектор $|v\rangle$ важи да је

$$\left[|v\rangle\right]_{\{|v_i\rangle\}}=\mathscr{T}^{-1}\left[|v\rangle\right]_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}}\ ?$$

Произвољни вектор $|v\rangle=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)$ представља се матрицом-колоном

$$|v\rangle=\begin{bmatrix}\xi_1\\\xi_2\\\xi_3\end{bmatrix}$$

која је репрезентација тог вектора у апсолутном базису пошто је

$$|v\rangle=\begin{bmatrix}\xi_1\\\xi_2\\\xi_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\xi_1\\0\\0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\\xi_2\\0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\0\\\xi_3\end{bmatrix}=\xi_1\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}+\xi_2\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}+\xi_3\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$$

$$=\xi_1\left[|\mathrm{e}_1\rangle\right]_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}}+\xi_2\left[|\mathrm{e}_2\rangle\right]_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}}+\xi_3\left[|\mathrm{e}_3\rangle\right]_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}}=\left[|v\rangle\right]_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}}$$

Исти вектор је у другом базису представљен као

$$\left[|v\rangle\right]_{\{|v_i\rangle\}}=\begin{bmatrix}\eta_1\\\eta_2\\\eta_3\end{bmatrix}_{\{|v_i\rangle\}}=\eta_1\left[|v_1\rangle\right]_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}}+\eta_2\left[|v_2\rangle\right]_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}}+\eta_3\left[|v_3\rangle\right]_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}}$$

$$=\eta_1\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}+\eta_2\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}+\eta_3\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\eta_1+\eta_2+\eta_3\\\eta_1+\eta_2\\\eta_1\end{bmatrix}_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}}$$

с тим што ова матрица мора бити једнака матрици истог вектора у апсолутном базису, те је

$$\begin{bmatrix}\xi_1\\\xi_2\\\xi_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\eta_1+\eta_2+\eta_3\\\eta_1+\eta_2\\\eta_1\end{bmatrix}\Leftrightarrow\underline{\begin{cases}\xi_1=\eta_1+\eta_2+\eta_3\\\xi_2=\eta_1+\eta_2\\\xi_3=\eta_1\end{cases}}\Leftrightarrow\underline{\begin{cases}\xi_1=\eta_1+\eta_2+\eta_3\\\xi_2=\eta_1+\eta_2\\\eta_1=\xi_3\end{cases}}$$

$$\Rightarrow\underline{\begin{cases}\xi_1=\xi_2+\eta_3\\\xi_2=\xi_3+\eta_2\\\eta_1=\xi_3\end{cases}}\Leftrightarrow\underline{\begin{cases}\eta_3=\xi_1-\xi_2\\\eta_2=\xi_2-\xi_3\\\eta_1=\xi_3\end{cases}}$$

Зато је

$$\big[|v\rangle\big]_{\{|v_i\rangle\}}=\begin{bmatrix}\eta_1\\ \eta_2\\ \eta_3\end{bmatrix}_{\{|v_i\rangle\}}=\begin{bmatrix}\xi_3\\ \xi_2-\xi_3\\ \xi_1-\xi_2\end{bmatrix}_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}}.$$

Када се делује матрицом оператора $\hat{\rho}$ на матрицу-колону произвољног вектора у апсолутном базису добија се

$$\big[\hat{\rho}\big]_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}}\big[|v\rangle\big]_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}}=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&-1\\1&-1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\xi_1\\ \xi_2\\ \xi_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\cdot\xi_1+0\cdot\xi_2+1\cdot\xi_3\\ 0\cdot\xi_1+0\cdot\xi_2+(-1)\cdot\xi_3\\ 1\cdot\xi_1+(-1)\cdot\xi_2+0\cdot\xi_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\xi_3\\ \xi_2-\xi_3\\ \xi_1-\xi_2\end{bmatrix}$$

што јесте горњи вектор у задатом базису. Значи да је доиста

$$\big[|v\rangle\big]_{\{|v_i\rangle\}}=\big[\hat{\rho}\big]_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}}\big[|v\rangle\big]_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}}.$$

Матрица којом се задати оператор $\hat{A}(\xi_1,\xi_2,\xi_3)=(2\xi_1-3\xi_2+4\xi_3,5\xi_1-3\xi_2+2\xi_3,4\xi_1+7\xi_2)$ представља у апсолутном базису добија се деловањем задатог оператора на оба вектора апсолутног базиса. Потом се тако добијени ликови пишу као линеарне комбинације вектора апсолутног базиса

$$\left\{\begin{aligned}&\hat{A}(1,0,0)=(2,5,4)=2|\mathrm{e}_1\rangle+5|\mathrm{e}_2\rangle+4|\mathrm{e}_3\rangle\\ &\hat{A}(0,1,0)=(-3,-3,7)=(-3)|\mathrm{e}_1\rangle+(-3)|\mathrm{e}_2\rangle+7|\mathrm{e}_3\rangle\\ &\hat{A}(0,0,1)=(4,2,0)=4|\mathrm{e}_1\rangle+2|\mathrm{e}_2\rangle+0|\mathrm{e}_3\rangle\end{aligned}\right.\Rightarrow\mathscr{A}=\big[\hat{A}\big]_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}}=\begin{bmatrix}2&-3&4\\5&-3&2\\4&7&0\end{bmatrix}.$$

Поступак је потпуно исти за други задати оператор $\hat{B}(\xi_1,\xi_2,\xi_3)=(2\xi_1+\xi_3,\xi_1-4\xi_2,3\xi_1)$

$$\left\{\begin{aligned}&\hat{B}(1,0,0)=(2,1,3)=2|\mathrm{e}_1\rangle+1|\mathrm{e}_2\rangle+3|\mathrm{e}_3\rangle\\ &\hat{B}(0,1,0)=(0,-4,0)=0|\mathrm{e}_1\rangle+(-4)|\mathrm{e}_2\rangle+0|\mathrm{e}_3\rangle\\ &\hat{B}(0,0,1)=(1,0,0)=1|\mathrm{e}_1\rangle+0|\mathrm{e}_2\rangle+0|\mathrm{e}_3\rangle\end{aligned}\right.\Rightarrow\mathscr{B}=\big[\hat{B}\big]_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}}=\begin{bmatrix}2&0&1\\1&-4&0\\3&0&0\end{bmatrix}.$$

Матрица оператора $\hat{A}(\xi_1,\xi_2,\xi_3)=(2\xi_1-3\xi_2+4\xi_3,5\xi_1-3\xi_2+2\xi_3,4\xi_1+7\xi_2)$ у датом базису добија се његовим деловањем на векторе задатог базиса. Потом се тако добијени ликови, у складу са основном формулом репрезентовања, записују као линеарне комбинације вектора задатог базиса

$$\hat{A}|v_1\rangle=\hat{A}(1,1,1)=(3,4,11)=\alpha|v_1\rangle+\beta|v_2\rangle+\gamma|v_3\rangle=\alpha(1,1,1)+\beta(1,1,0)+\gamma(1,0,0)=(\alpha+\beta+\gamma,\alpha+\beta,\alpha)$$
$$\hat{A}|v_2\rangle=\hat{A}(1,1,0)=(-1,2,11)=\delta|v_1\rangle+\varepsilon|v_2\rangle+\gamma|v_3\rangle=\delta(1,1,1)+\varepsilon(1,1,0)+\xi(1,0,0)=(\delta+\varepsilon+\xi,\delta+\varepsilon,\delta)$$
$$\hat{A}|v_3\rangle=\hat{A}(1,0,0)=(2,5,4)=\mu|v_1\rangle+\eta|v_2\rangle+\omega|v_3\rangle=\mu(1,1,1)+\eta(1,1,0)+\omega(1,0,0)=(\mu+\eta+\omega,\mu+\eta,\mu)$$

или, једноставније

$$(3,4,11) = (\alpha+\beta+\gamma, \alpha+\beta, \alpha)$$
$$(-1,2,11) = (\delta+\varepsilon+\xi, \delta+\varepsilon, \delta)$$
$$(2,5,4) = (\mu+\eta+\omega, \mu+\eta, \mu)$$

Из прве једнакости уређених тројки добија се следећи систем једначина

$$\begin{cases}\alpha+\beta+\gamma=3\\ \alpha+\beta=4\\ \alpha=11\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\gamma=3-(\alpha+\beta)\\ \alpha+\beta=4\\ \alpha=11\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\gamma=3-4\\ \beta=4-\alpha\\ \alpha=11\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\gamma=-1\\ \beta=4-11\\ \alpha=11\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\gamma=-1\\ \beta=-7\\ \alpha=11\end{cases}$$

из друге једнакости добија се систем једначина

$$\begin{cases}\delta+\varepsilon+\xi=-1\\ \delta+\varepsilon=2\\ \delta=11\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\xi=-1-(\delta+\varepsilon)\\ \delta+\varepsilon=2\\ \delta=11\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\xi=-1-2\\ \varepsilon=2-\delta\\ \delta=11\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\xi=-3\\ \varepsilon=2-11\\ \delta=11\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\xi=-3\\ \varepsilon=-9\\ \delta=11\end{cases}$$

док се из треће једнакости добија систем

$$\begin{cases}\mu+\eta+\omega=2\\ \mu+\eta=5\\ \mu=4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\omega=2-(\mu+\eta)\\ \mu+\eta=5\\ \mu=4\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\omega=2-5\\ \eta=5-\mu\\ \mu=4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\omega=-3\\ \eta=5-4\\ \mu=4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\omega=-3\\ \eta=1\\ \mu=4\end{cases}$$

У матрици првог задатог оператора у датом базису израчунати коефицијенти линеарне комбинације записују се као

$$\begin{cases}\hat{A}|v_1\rangle = \alpha|v_1\rangle+\beta|v_2\rangle+\gamma|v_3\rangle = 11|v_1\rangle+(-7)|v_2\rangle+(-1)|v_3\rangle\\ \hat{A}|v_2\rangle = \delta|v_1\rangle+\varepsilon|v_2\rangle+\xi|v_3\rangle = 11|v_1\rangle+(-9)|v_2\rangle+(-3)|v_3\rangle\\ \hat{A}|v_3\rangle = \mu|v_1\rangle+\eta|v_2\rangle+\omega|v_3\rangle = 4|v_1\rangle+1|v_2\rangle+(-3)|v_3\rangle\end{cases} \Rightarrow \left[\hat{A}\right]_{\{|v_i\rangle\}} = \begin{bmatrix}11 & 11 & 4\\ -7 & -9 & 1\\ -1 & -3 & -3\end{bmatrix}.$$

Такође је потребно добити матрицу оператора $\hat{B}(\xi_1,\xi_2,\xi_3) = (2\xi_1+\xi_3, \xi_1-4\xi_2, 3\xi_1)$ у задатом базису његовим деловањем на векторе задатог базиса. Потом се тако добијени ликови, у складу са основном формулом репрезентовања, пишу као линеарне комбинације вектора задатог базиса

$$\hat{B}|v_1\rangle = \hat{B}(1,1,1) = (3,-3,3) = \alpha|v_1\rangle+\beta|v_2\rangle+\gamma|v_3\rangle = \alpha(1,1,1)+\beta(1,1,0)+\gamma(1,0,0) = (\alpha+\beta+\gamma, \alpha+\beta, \alpha)$$
$$\hat{B}|v_2\rangle = \hat{B}(1,1,0) = (2,-3,3) = \delta|v_1\rangle+\varepsilon|v_2\rangle+\gamma|v_3\rangle = \delta(1,1,1)+\varepsilon(1,1,0)+\xi(1,0,0) = (\delta+\varepsilon+\xi, \delta+\varepsilon, \delta)$$
$$\hat{B}|v_3\rangle = \hat{B}(1,0,0) = (2,1,3) = \mu|v_1\rangle+\eta|v_2\rangle+\omega|v_3\rangle = \mu(1,1,1)+\eta(1,1,0)+\omega(1,0,0) = (\mu+\eta+\omega, \mu+\eta, \mu)$$

или, једноставније

$$(3,-3,3) = (\alpha+\beta+\gamma, \alpha+\beta, \alpha)$$
$$(2,-3,3) = (\delta+\varepsilon+\xi, \delta+\varepsilon, \delta)$$
$$(2,1,3) = (\mu+\eta+\omega, \mu+\eta, \mu)$$

Из прве једнакости уређених тројки добија се следећи систем једначина

$$\underline{\begin{cases}\alpha+\beta+\gamma=3\\ \alpha+\beta=-3\\ \alpha=3\end{cases}} \Leftrightarrow \underline{\begin{cases}\gamma=3-(\alpha+\beta)\\ \alpha+\beta=-3\\ \alpha=3\end{cases}} \Rightarrow \underline{\begin{cases}\gamma=3-(-3)\\ \beta=-3-\alpha\\ \alpha=3\end{cases}} \Leftrightarrow \underline{\begin{cases}\gamma=6\\ \beta=-3-3\\ \alpha=3\end{cases}} \Leftrightarrow \underline{\begin{cases}\gamma=6\\ \beta=-6\\ \alpha=3\end{cases}}$$

из друге једнакости добија се систем једначина

$$\underline{\begin{cases}\delta+\varepsilon+\xi=2\\ \delta+\varepsilon=-3\\ \delta=3\end{cases}} \Leftrightarrow \underline{\begin{cases}\xi=2-(\delta+\varepsilon)\\ \delta+\varepsilon=-3\\ \delta=3\end{cases}} \Rightarrow \underline{\begin{cases}\xi=2-(-3)\\ \varepsilon=-3-\delta\\ \delta=3\end{cases}} \Leftrightarrow \underline{\begin{cases}\xi=5\\ \varepsilon=-3-3\\ \delta=3\end{cases}} \Leftrightarrow \underline{\begin{cases}\xi=5\\ \varepsilon=-6\\ \delta=3\end{cases}}$$

док се из треће једнакости добија систем

$$\underline{\begin{cases}\mu+\eta+\omega=2\\ \mu+\eta=1\\ \mu=3\end{cases}} \Leftrightarrow \underline{\begin{cases}\omega=2-(\mu+\eta)\\ \mu+\eta=1\\ \mu=3\end{cases}} \Rightarrow \underline{\begin{cases}\omega=2-1\\ \eta=1-\mu\\ \mu=3\end{cases}} \Leftrightarrow \underline{\begin{cases}\omega=1\\ \eta=1-3\\ \mu=3\end{cases}} \Leftrightarrow \underline{\begin{cases}\omega=1\\ \eta=-2\\ \mu=3\end{cases}}$$

Матрица другог датог оператора у задатом базису добија се када се добијени коефицијенти линеарне комбинације запишу као

$$\underline{\begin{cases}\hat{B}|v_1\rangle=\alpha|v_1\rangle+\beta|v_2\rangle+\gamma|v_3\rangle=3|v_1\rangle+(-6)|v_2\rangle+6|v_3\rangle\\ \hat{B}|v_2\rangle=\delta|v_1\rangle+\varepsilon|v_2\rangle+\xi|v_3\rangle=3|v_1\rangle+(-6)|v_2\rangle+5|v_3\rangle\\ \hat{B}|v_3\rangle=\mu|v_1\rangle+\eta|v_2\rangle+\omega|v_3\rangle=3|v_1\rangle+(-2)|v_2\rangle+1|v_3\rangle\end{cases}} \Rightarrow \left[\hat{B}\right]_{\{|v_i\rangle\}}=\begin{bmatrix}3&3&3\\-6&-6&-2\\6&5&1\end{bmatrix}.$$

Преостало је још да се провери важење *трансформације сличности* за оба оператора

$$\left[\hat{A}\right]_{\{|v_i\rangle\}}=\mathscr{T}^{-1}\left[\hat{A}\right]_{\{|e_i\rangle\}}\mathscr{T} \quad \text{и} \quad \left[\hat{B}\right]_{\{|v_i\rangle\}}=\mathscr{T}^{-1}\left[\hat{B}\right]_{\{|e_i\rangle\}}\mathscr{T}.$$

Почиње се са провером трансформације сличности за први оператор

$$\begin{aligned}\mathscr{T}^{-1}\left[\hat{A}\right]_{\{|e_i\rangle\}}\mathscr{T}&=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&-1\\1&-1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&-3&4\\5&-3&2\\4&7&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}\\
&=\begin{bmatrix}0\cdot2+0\cdot5+1\cdot4 & 0\cdot(-3)+0\cdot(-3)+1\cdot7 & 0\cdot4+0\cdot2+1\cdot0\\ 0\cdot2+1\cdot5+(-1)\cdot4 & 0\cdot(-3)+1\cdot(-3)+(-1)\cdot7 & 0\cdot4+1\cdot2+(-1)\cdot0\\ 1\cdot2+(-1)\cdot5+0\cdot4 & 1\cdot(-3)+(-1)\cdot(-3)+0\cdot7 & 1\cdot4+(-1)\cdot2+0\cdot0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}\\
&=\begin{bmatrix}4&7&0\\1&-10&2\\-3&0&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}\\
&=\begin{bmatrix}4\cdot1+7\cdot1+0\cdot1 & 4\cdot1+7\cdot1+0\cdot0 & 4\cdot1+7\cdot0+0\cdot0\\ 1\cdot1+(-10)\cdot1+2\cdot1 & 1\cdot1+(-10)\cdot1+2\cdot0 & 1\cdot1+(-10)\cdot0+2\cdot0\\ (-3)\cdot1+0\cdot1+2\cdot1 & (-3)\cdot1+0\cdot1+2\cdot0 & (-3)\cdot1+0\cdot0+2\cdot0\end{bmatrix}\end{aligned}$$

или

$$\mathscr{T}^{-1}\left[\hat{A}\right]_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}}\mathscr{T}=\begin{bmatrix}11 & 11 & 4\\ -7 & -9 & 1\\ -1 & -3 & -3\end{bmatrix}$$

што је, наравно, једнако

$$\left[\hat{A}\right]_{\{|v_i\rangle\}}=\begin{bmatrix}11 & 11 & 4\\ -7 & -9 & 1\\ -1 & -3 & -3\end{bmatrix}.$$

Потом се проверава трансформација сличности за други оператор

$$\begin{aligned}\mathscr{T}^{-1}\left[\hat{B}\right]_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}}\mathscr{T}&=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -1\\ 1 & -1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 0 & 1\\ 1 & -4 & 0\\ 3 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}\\
&=\begin{bmatrix}0\cdot 2+0\cdot 1+1\cdot 3 & 0\cdot 0+0\cdot(-4)+1\cdot 0 & 0\cdot 1+0\cdot 0+1\cdot 0\\ 0\cdot 2+1\cdot 1+(-1)\cdot 3 & 0\cdot 0+1\cdot(-4)+(-1)\cdot 0 & 0\cdot 1+1\cdot 0+(-1)\cdot 0\\ 1\cdot 2+(-1)\cdot 1+0\cdot 3 & 1\cdot 0+(-1)\cdot(-4)+0\cdot 0 & 1\cdot 1+(-1)\cdot 0+0\cdot 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}\\
&=\begin{bmatrix}3 & 0 & 0\\ -2 & -4 & 0\\ 1 & 4 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}\\
&=\begin{bmatrix}3\cdot 1+0\cdot 1+0\cdot 1 & 3\cdot 1+0\cdot 1+0\cdot 0 & 3\cdot 1+0\cdot 0+0\cdot 0\\ (-2)\cdot 1+(-4)\cdot 1+0\cdot 1 & (-2)\cdot 1+(-4)\cdot 1+0\cdot 0 & (-2)\cdot 1+(-4)\cdot 0+0\cdot 0\\ 1\cdot 1+4\cdot 1+1\cdot 1 & 1\cdot 1+4\cdot 1+1\cdot 0 & 1\cdot 1+4\cdot 0+1\cdot 0\end{bmatrix}\\
&=\begin{bmatrix}3 & 3 & 3\\ -6 & -6 & -2\\ 6 & 5 & 1\end{bmatrix}\end{aligned}$$

што је свакако једнако

$$\left[\hat{B}\right]_{\{|v_i\rangle\}}=\begin{bmatrix}3 & 3 & 3\\ -6 & -6 & -2\\ 6 & 5 & 1\end{bmatrix}.$$

Очигледно је да важе трансформације сличности за оба оператора.

(9.5) Дат је оператор

$$\hat{A}(\xi_1,\xi_2,\xi_3)=(2\xi_1+\xi_2,\xi_3+\xi_1,\xi_2)\,.$$

Одредити *матрицу* овог оператора у апсолутном базису простора $\mathbb{R}^3$, као и у базисима

$$\{|u_1\rangle=(1,0,0),|u_2\rangle=(1,1,0),|u_3\rangle=(1,1,1)\}\quad \text{и}\quad \{|v_1\rangle=(1,0,1),|v_2\rangle=(1,1,0),|v_3\rangle=(0,1,1)\}$$

и то

(а) директно;

(б) коришћењем матрица преласка.

(а) Директно:

Прво се задатим оператором $\hat{A}(\xi_1,\xi_2,\xi_3)=(2\xi_1+\xi_2,\xi_3+\xi_1,\xi_2)$ делује на векторе апсолутног базиса

$$\{|\mathrm{e}_1\rangle=(1,0,0),|\mathrm{e}_2\rangle=(0,1,0),|\mathrm{e}_3\rangle=(0,0,1)\}$$

на следећи начин

$$\underline{\begin{cases}\hat{A}(1,0,0)=(2,1,0)=2|\mathrm{e}_1\rangle+1|\mathrm{e}_2\rangle+0|\mathrm{e}_3\rangle\\ \hat{A}(0,1,0)=(1,0,1)=1|\mathrm{e}_1\rangle+0|\mathrm{e}_2\rangle+1|\mathrm{e}_3\rangle\\ \hat{A}(0,0,1)=(0,1,0)=0|\mathrm{e}_1\rangle+1|\mathrm{e}_2\rangle+0|\mathrm{e}_3\rangle\end{cases}}\;\Rightarrow\;\mathscr{A}=\left[\hat{A}\right]_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}}=\begin{bmatrix}2&1&0\\1&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}.$$

Потом се деловањем истог оператора $\hat{A}(\xi_1,\xi_2,\xi_3)=(2\xi_1+\xi_2,\xi_3+\xi_1,\xi_2)$ добијени ликови вектора првог задатог базиса

$$\{|u_1\rangle=(1,0,0),|u_2\rangle=(1,1,0),|u_3\rangle=(1,1,1)\}$$

запишу као линеарне комбинације тих истих вектора, у складу с основном формулом репрезентовања

$$\hat{A}|u_1\rangle=\hat{A}(1,0,0)=(2,1,0)=\alpha|u_1\rangle+\beta|u_2\rangle+\gamma|u_3\rangle=\alpha(1,0,0)+\beta(1,1,0)+\gamma(1,1,1)=(\alpha+\beta+\gamma,\beta+\gamma,\gamma)$$
$$\hat{A}|u_2\rangle=\hat{A}(1,1,0)=(3,1,1)=\delta|u_1\rangle+\varepsilon|u_2\rangle+\gamma|u_3\rangle=\delta(1,0,0)+\varepsilon(1,1,0)+\xi(1,1,1)=(\delta+\varepsilon+\xi,\varepsilon+\xi,\xi)$$
$$\hat{A}|u_3\rangle=\hat{A}(1,1,1)=(3,2,1)=\mu|u_1\rangle+\eta|u_2\rangle+\omega|u_3\rangle=\mu(1,0,0)+\eta(1,1,0)+\omega(1,1,1)=(\mu+\eta+\omega,\eta+\omega,\omega)$$

или, једноставније

$$(2,1,0)=(\alpha+\beta+\gamma,\beta+\gamma,\gamma)$$
$$(3,1,1)=(\delta+\varepsilon+\xi,\varepsilon+\xi,\xi)$$
$$(3,2,1)=(\mu+\eta+\omega,\eta+\omega,\omega)$$

Из прве једнакости уређених тројки добија се следећи систем једначина

$$\underline{\begin{cases}\alpha+\beta+\gamma=2\\ \beta+\gamma=1\\ \gamma=0\end{cases}}\;\Leftrightarrow\;\underline{\begin{cases}\alpha=2-(\beta+\gamma)\\ \beta+\gamma=1\\ \gamma=0\end{cases}}\;\Rightarrow\;\underline{\begin{cases}\alpha=2-1\\ \beta=1-\gamma\\ \gamma=0\end{cases}}\;\Leftrightarrow\;\underline{\begin{cases}\alpha=1\\ \beta=1\\ \gamma=0\end{cases}}$$

из друге једнакости добија се систем једначина

$$\underline{\begin{cases}\delta+\varepsilon+\xi=3\\ \varepsilon+\xi=1\\ \xi=1\end{cases}} \Leftrightarrow \underline{\begin{cases}\delta=3-(\varepsilon+\xi)\\ \varepsilon+\xi=1\\ \xi=1\end{cases}} \Rightarrow \underline{\begin{cases}\delta=3-1\\ \varepsilon=1-\xi\\ \xi=1\end{cases}} \Leftrightarrow \underline{\begin{cases}\delta=2\\ \varepsilon=1-1\\ \xi=1\end{cases}} \Leftrightarrow \underline{\begin{cases}\delta=2\\ \varepsilon=0\\ \xi=1\end{cases}}$$

док се из треће једнакости добија систем

$$\underline{\begin{cases}\mu+\eta+\omega=3\\ \eta+\omega=2\\ \omega=1\end{cases}} \Leftrightarrow \underline{\begin{cases}\mu=3-(\eta+\omega)\\ \eta+\omega=2\\ \omega=1\end{cases}} \Rightarrow \underline{\begin{cases}\omega=3-2\\ \eta=2-\omega\\ \omega=1\end{cases}} \Leftrightarrow \underline{\begin{cases}\omega=1\\ \eta=2-1\\ \omega=1\end{cases}} \Leftrightarrow \underline{\begin{cases}\omega=1\\ \eta=1\\ \omega=1\end{cases}}$$

У матрицу задатог оператора у првом задатом базису израчунати коефицијенти линеарне комбинације записују се као

$$\underline{\begin{cases}\hat{A}|u_1\rangle=\alpha|u_1\rangle+\beta|u_2\rangle+\gamma|u_3\rangle=1|u_1\rangle+1|u_2\rangle+0|u_3\rangle\\ \hat{A}|u_2\rangle=\delta|u_1\rangle+\varepsilon|u_2\rangle+\xi|u_3\rangle=2|u_1\rangle+0|u_2\rangle+1|u_3\rangle\\ \hat{A}|u_3\rangle=\mu|u_1\rangle+\eta|u_2\rangle+\omega|u_3\rangle=1|u_1\rangle+1|u_2\rangle+1|u_3\rangle\end{cases}} \Rightarrow \left[\hat{A}\right]_{\{|u_i\rangle\}}=\begin{bmatrix}1&2&1\\1&0&1\\0&1&1\end{bmatrix}.$$

Затим се деловањем задатог оператора $\hat{A}(\xi_1,\xi_2,\xi_3)=(2\xi_1+\xi_2,\xi_3+\xi_1,\xi_2)$ добијени ликови вектора другог задатог базиса

$$\{|v_1\rangle=(1,0,1),|v_2\rangle=(1,1,0),|v_3\rangle=(0,1,1)\}$$

записују као линеарне комбинације истих вектора, у складу с основном формулом репрезентовања

$$\hat{A}|v_1\rangle=\hat{A}(1,0,1)=(2,2,0)=\alpha|v_1\rangle+\beta|v_2\rangle+\gamma|v_3\rangle=\alpha(1,0,1)+\beta(1,1,0)+\gamma(0,1,1)=(\alpha+\beta,\beta+\gamma,\alpha+\gamma)$$
$$\hat{A}|v_2\rangle=\hat{A}(1,1,0)=(3,1,1)=\delta|v_1\rangle+\varepsilon|v_2\rangle+\gamma|v_3\rangle=\delta(1,0,1)+\varepsilon(1,1,0)+\xi(0,1,1)=(\delta+\varepsilon,\varepsilon+\xi,\delta+\xi)$$
$$\hat{A}|v_3\rangle=\hat{A}(0,1,1)=(1,1,1)=\mu|v_1\rangle+\eta|v_2\rangle+\omega|v_3\rangle=\mu(1,0,1)+\eta(1,1,0)+\omega(0,1,1)=(\mu+\eta,\eta+\omega,\mu+\omega)$$

или, једноставније

$$\begin{aligned}(2,2,0)&=(\alpha+\beta,\beta+\gamma,\alpha+\gamma)\\ (3,1,1)&=(\delta+\varepsilon,\varepsilon+\xi,\delta+\xi)\\ (1,1,1)&=(\mu+\eta,\eta+\omega,\mu+\omega)\end{aligned}$$

Из прве једнакости уређених тројки добија се следећи систем једначина

$$\underline{\begin{cases}\alpha+\beta=2\\ \beta+\gamma=2\\ \alpha+\gamma=0\end{cases}} \Leftrightarrow \underline{\begin{cases}\alpha+\beta=2\\ \beta+\gamma=2\\ \alpha=-\gamma\end{cases}} \Rightarrow \underline{\begin{cases}-\gamma+\beta=2\\ \gamma+\beta=2\\ \alpha=-\gamma\end{cases}} \Leftrightarrow \underline{\begin{cases}2\beta=4\\ \gamma+\beta=2\\ \alpha=-\gamma\end{cases}} \Leftrightarrow \underline{\begin{cases}\beta=2\\ \gamma=2-\beta\\ \alpha=-\gamma\end{cases}} \Leftrightarrow \underline{\begin{cases}\beta=2\\ \gamma=0\\ \alpha=0\end{cases}}$$

из друге једнакости добија се систем једначина

$$\underline{\begin{cases}\delta+\varepsilon=3\\ \varepsilon+\xi=1\\ \delta+\xi=1\end{cases}} \Leftrightarrow \underline{\begin{cases}\delta+\varepsilon=3\\ -\varepsilon-\xi=-1\\ \delta+\xi=1\end{cases}} \Rightarrow \underline{\begin{cases}\delta+\varepsilon=3\\ \delta-\varepsilon=0\\ \delta+\xi=1\end{cases}} \Leftrightarrow \underline{\begin{cases}\delta+\varepsilon=3\\ \delta=\varepsilon\\ \delta+\xi=1\end{cases}} \Leftrightarrow \underline{\begin{cases}\varepsilon+\varepsilon=3\\ \delta=\varepsilon\\ \xi=1-\delta\end{cases}} \Leftrightarrow \underline{\begin{cases}\varepsilon=3/2\\ \delta=3/2\\ \xi=-1/2\end{cases}}$$

док се из треће једнакости добија систем

$$\begin{cases}\mu+\eta=1\\ \eta+\omega=1\\ \mu+\omega=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\mu+\eta=1\\ -\eta-\omega=-1\\ \mu+\omega=1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\mu+\eta=1\\ \mu-\eta=0\\ \mu+\omega=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\mu+\eta=1\\ \mu=\eta\\ \mu+\omega=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\eta+\eta=1\\ \mu=\eta\\ \omega=1-\mu\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\eta=1/2\\ \mu=1/2\\ \omega=1/2\end{cases}$$

У матрицу задатог оператора у другом задатом базису израчунати коефицијенти линеарне комбинације записују се као

$$\begin{cases}\hat{A}|v_1\rangle=\alpha|v_1\rangle+\beta|v_2\rangle+\gamma|v_3\rangle=0|v_1\rangle+2|v_2\rangle+0|v_3\rangle\\ \hat{A}|v_2\rangle=\delta|v_1\rangle+\varepsilon|v_2\rangle+\xi|v_3\rangle=\frac{3}{2}2|v_1\rangle+\frac{3}{2}|v_2\rangle-\frac{1}{2}|v_3\rangle\\ \hat{A}|v_3\rangle=\mu|v_1\rangle+\eta|v_2\rangle+\omega|v_3\rangle=\frac{1}{2}|v_1\rangle+\frac{1}{2}|v_2\rangle+\frac{1}{2}|v_3\rangle\end{cases} \Rightarrow \left[\hat{A}\right]_{\{|v_i\rangle\}}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}0&3&1\\4&3&1\\0&-1&1\end{bmatrix}.$$

(б) Преко матрица преласка:

Оператором преласка $\hat{T}$ пресликава се апсолутни у први задати базис

$$\{|\mathrm{e}_1\rangle,|\mathrm{e}_2\rangle,|\mathrm{e}_3\rangle\}\xrightarrow{\hat{T}}\{|u_1\rangle,|u_2\rangle,|u_3\rangle\};$$

у матричном простору, оператору преласка одговара матрица преласка $\mathscr{T}$, којом се матрице-колоне које одговарају векторима апсолутног базиса пресликавају у матрице-колоне које одговарају векторима првог задатог базиса

$$\left\{\left[|\mathrm{e}_1\rangle\right]_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}},\left[|\mathrm{e}_2\rangle\right]_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}},\left[|\mathrm{e}_3\rangle\right]_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}}\right\}\xrightarrow{\mathscr{T}}\left\{\left[|u_1\rangle\right]_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}},\left[|u_2\rangle\right]_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}},\left[|u_3\rangle\right]_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}}\right\}$$

или, конкретније

$$\begin{cases}\left[|u_1\rangle\right]_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}}=\mathscr{T}\left[|\mathrm{e}_1\rangle\right]_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}}\\ \left[|u_2\rangle\right]_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}}=\mathscr{T}\left[|\mathrm{e}_2\rangle\right]_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}}\\ \left[|u_3\rangle\right]_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}}=\mathscr{T}\left[|\mathrm{e}_3\rangle\right]_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}t_{11}&t_{12}&t_{13}\\t_{21}&t_{22}&t_{23}\\t_{31}&t_{32}&t_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\\ \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}t_{11}&t_{12}&t_{13}\\t_{21}&t_{22}&t_{23}\\t_{31}&t_{32}&t_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\\ \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}t_{11}&t_{12}&t_{13}\\t_{21}&t_{22}&t_{23}\\t_{31}&t_{32}&t_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}t_{11}\\t_{21}\\t_{31}\end{bmatrix}\\ \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}t_{12}\\t_{22}\\t_{32}\end{bmatrix}\\ \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}t_{13}\\t_{23}\\t_{33}\end{bmatrix}\end{cases}$$

Пошто су свих девет матричних елемената добијени одмах, тражена матрица преласка гласи

$$\mathscr{T}=\left[\hat{T}\right]_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}}=\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}.$$

Оператором $\hat{\rho} = \hat{T}^{-1}$ пресликава се први задати у апсолутни базис

$$\{|u_1\rangle, |u_2\rangle, |u_3\rangle\} \xrightarrow{\hat{\rho}} \{|\mathrm{e}_1\rangle, |\mathrm{e}_2\rangle, |\mathrm{e}_3\rangle\};$$

у матричном простору, овом оператору одговара матрица преласка ρ, којом се матрице-колоне које одговарају векторима првог задатог базиса пресликавају у матрице-колоне које одговарају векторима апсолутног базиса

$$\left\{\left[|u_1\rangle\right]_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}}, \left[|u_2\rangle\right]_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}}, \left[|u_3\rangle\right]_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}}\right\} \xrightarrow{\rho} \left\{\left[|\mathrm{e}_1\rangle\right]_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}}, \left[|\mathrm{e}_2\rangle\right]_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}}, \left[|\mathrm{e}_3\rangle\right]_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}}\right\}$$

или, конкретније

$$\begin{cases} \left[|\mathrm{e}_1\rangle\right]_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}} = \rho\left[|u_1\rangle\right]_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}} \\ \left[|\mathrm{e}_2\rangle\right]_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}} = \rho\left[|u_2\rangle\right]_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}} \\ \left[|\mathrm{e}_3\rangle\right]_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}} = \rho\left[|u_3\rangle\right]_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\rho_{11} & \rho_{12} & \rho_{13}\\ \rho_{21} & \rho_{22} & \rho_{23}\\ \rho_{31} & \rho_{32} & \rho_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\rho_{11} & \rho_{12} & \rho_{13}\\ \rho_{21} & \rho_{22} & \rho_{23}\\ \rho_{31} & \rho_{32} & \rho_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\rho_{11} & \rho_{12} & \rho_{13}\\ \rho_{21} & \rho_{22} & \rho_{23}\\ \rho_{31} & \rho_{32} & \rho_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\rho_{11}\\ \rho_{21}\\ \rho_{31}\end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\rho_{11}+\rho_{12}\\ \rho_{21}+\rho_{22}\\ \rho_{31}+\rho_{32}\end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\rho_{11}+\rho_{12}+\rho_{13}\\ \rho_{21}+\rho_{22}+\rho_{23}\\ \rho_{31}+\rho_{32}+\rho_{33}\end{bmatrix} \end{cases}$$

одакле следе три система једначина

$$\begin{cases} \rho_{11} = 1 \\ \rho_{21} = 0 \\ \rho_{31} = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} \rho_{11} + \rho_{12} = 0 \\ \rho_{21} + \rho_{22} = 1 \\ \rho_{31} + \rho_{32} = 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} \rho_{11} + \rho_{12} + \rho_{13} = 0 \\ \rho_{21} + \rho_{22} + \rho_{23} = 0 \\ \rho_{31} + \rho_{32} + \rho_{33} = 1 \end{cases}$$

Како су решења првог система већ добијена, њиховом заменом у други систем добија се да су

$$\begin{cases} \rho_{12} = -\rho_{11} \\ \rho_{22} = 1 - \rho_{21} \\ \rho_{32} = -\rho_{31} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \rho_{12} = -1 \\ \rho_{22} = 1 \\ \rho_{32} = 0 \end{cases}$$

Заменом израза из другог система једначина у трећи, одмах се добија да су

$$\begin{cases} \rho_{11} + \rho_{12} + \rho_{13} = 0 \\ \rho_{21} + \rho_{22} + \rho_{23} = 0 \\ \rho_{31} + \rho_{32} + \rho_{33} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \rho_{13} = -(\rho_{11} + \rho_{12}) \\ \rho_{23} = -(\rho_{21} + \rho_{22}) \\ \rho_{33} = 1 - (\rho_{31} + \rho_{32}) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \rho_{13} = 0 \\ \rho_{23} = -1 \\ \rho_{33} = 1 \end{cases}$$

те тражена матрица преласка има облик

$$\rho = \left[\hat{\rho}\right]_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}} = \begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}.$$

Матрица преласка $\mathscr{T}$ и њој инверзна матрица ρ помножене ма којим редоследом морају у оба случаја дати јединичну матрицу. Прво иде

$$\mathscr{T}\rho=\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-1&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\cdot1+1\cdot0+1\cdot0 & 1\cdot(-1)+1\cdot1+1\cdot0 & 1\cdot0+1\cdot(-1)+1\cdot1\\0\cdot1+1\cdot0+1\cdot0 & 0\cdot(-1)+1\cdot1+1\cdot0 & 0\cdot0+1\cdot(-1)+1\cdot1\\0\cdot1+0\cdot0+1\cdot0 & 0\cdot(-1)+0\cdot1+1\cdot0 & 0\cdot0+0\cdot(-1)+1\cdot1\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}1+0+0 & -1+1+0 & 0-1+1\\0+0+0 & 0+1+0 & 0-1+1\\0+0+0 & 0+0+0 & 0+0+1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\mathscr{I}$$

а потом и

$$\rho\mathscr{T}=\begin{bmatrix}1&-1&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\cdot1+(-1)\cdot0+0\cdot0 & 1\cdot1+(-1)\cdot1+0\cdot0 & 1\cdot1+(-1)\cdot1+0\cdot1\\0\cdot1+1\cdot0+(-1)\cdot0 & 0\cdot1+1\cdot1+(-1)\cdot0 & 0\cdot1+1\cdot1+(-1)\cdot1\\0\cdot1+0\cdot0+1\cdot0 & 0\cdot1+0\cdot1+1\cdot0 & 0\cdot1+0\cdot1+1\cdot1\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}1+0+0 & 1-1+0 & 1-1+0\\0+0+0 & 0+1+0 & 0+1-1\\0+0+0 & 0+0+0 & 0+0+1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\mathscr{I}$$

Како су оба захтева испуњена, заиста је $\rho=\mathscr{T}^{-1}$ односно $\mathscr{T}=\rho^{-1}$.

Преостало је да се провери важење *трансформације сличности* за дати оператор

$$\left[\hat{A}\right]_{\{|v_i\rangle\}}=\mathscr{T}^{-1}\left[\hat{A}\right]_{\{|e_i\rangle\}}\mathscr{T}$$
$$=\begin{bmatrix}1&-1&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&1&0\\1&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}1&-1&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\cdot1+1\cdot0+0\cdot0 & 2\cdot1+1\cdot1+0\cdot0 & 2\cdot1+1\cdot1+0\cdot1\\1\cdot1+0\cdot0+1\cdot0 & 1\cdot1+0\cdot1+1\cdot0 & 1\cdot1+0\cdot1+1\cdot1\\0\cdot1+1\cdot0+0\cdot0 & 0\cdot1+1\cdot1+0\cdot0 & 0\cdot1+1\cdot1+0\cdot1\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}1&-1&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&3&3\\1&1&2\\0&1&1\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}1\cdot2+(-1)\cdot1+0\cdot0 & 1\cdot3+(-1)\cdot1+0\cdot1 & 1\cdot3+(-1)\cdot2+0\cdot1\\0\cdot2+1\cdot1+(-1)\cdot0 & 0\cdot3+1\cdot1+(-1)\cdot1 & 0\cdot3+1\cdot2+(-1)\cdot1\\0\cdot2+0\cdot1+1\cdot0 & 0\cdot3+0\cdot1+1\cdot1 & 0\cdot3+0\cdot2+1\cdot1\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}2-1+0 & 3-1+0 & 3-2+0\\0+1+0 & 0+1-1 & 0+2-1\\0+0+0 & 0+0+1 & 0+0+1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2&1\\1&0&1\\0&1&1\end{bmatrix}.$$

што јесте једнако матрици $\left[\hat{A}\right]_{\{|u_i\rangle\}}$ добијеној раније.

Сада треба добити оператор преласка $\hat{T}$ из апсолутног у други задати базис

$$\left\{|\mathrm{e}_1\rangle,|\mathrm{e}_2\rangle,|\mathrm{e}_3\rangle\right\}\xrightarrow{\hat{T}}\left\{|v_1\rangle,|v_2\rangle,|v_3\rangle\right\};$$

у матричном простору, оператору преласка одговара матрица преласка $\mathscr{T}$, којом се матрице-колоне које одговарају векторима апсолутног базиса пресликавају у матрице-колоне које одговарају векторима другог задатог базиса

$$\left\{\left[|\mathrm{e}_1\rangle\right]_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}},\left[|\mathrm{e}_2\rangle\right]_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}},\left[|\mathrm{e}_3\rangle\right]_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}}\right\}\xrightarrow{\mathscr{T}}\left\{\left[|v_1\rangle\right]_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}},\left[|v_2\rangle\right]_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}},\left[|v_3\rangle\right]_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}}\right\}$$

или, конкретније

$$\left\{\begin{array}{l}\left[|v_1\rangle\right]_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}}=\mathscr{T}\left[|\mathrm{e}_1\rangle\right]_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}}\\ \left[|v_2\rangle\right]_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}}=\mathscr{T}\left[|\mathrm{e}_2\rangle\right]_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}}\\ \left[|v_3\rangle\right]_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}}=\mathscr{T}\left[|\mathrm{e}_3\rangle\right]_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}t_{11}&t_{12}&t_{13}\\t_{21}&t_{22}&t_{23}\\t_{31}&t_{32}&t_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\\ \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}t_{11}&t_{12}&t_{13}\\t_{21}&t_{22}&t_{23}\\t_{31}&t_{32}&t_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\\ \begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}t_{11}&t_{12}&t_{13}\\t_{21}&t_{22}&t_{23}\\t_{31}&t_{32}&t_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}t_{11}\\t_{21}\\t_{31}\end{bmatrix}\\ \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}t_{12}\\t_{22}\\t_{32}\end{bmatrix}\\ \begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}t_{13}\\t_{23}\\t_{33}\end{bmatrix}\end{array}\right.$$

Пошто су свих девет матричних елемената добијени одмах, тражена матрица преласка гласи

$$\mathscr{T}=\left[\hat{T}\right]_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}}=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&0&1\end{bmatrix}.$$

Оператором $\hat{\rho}=\hat{T}^{-1}$ пресликава се други задати у апсолутни базис

$$\left\{|v_1\rangle,|v_2\rangle,|v_3\rangle\right\}\xrightarrow{\hat{\rho}}\left\{|\mathrm{e}_1\rangle,|\mathrm{e}_2\rangle,|\mathrm{e}_3\rangle\right\};$$

у матричном простору, овом оператору одговара матрица преласка ρ, којом се матрице-колоне које одговарају векторима првог задатог базиса пресликавају у матрице-колоне које одговарају векторима апсолутног базиса

$$\left\{\left[|v_1\rangle\right]_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}},\left[|v_2\rangle\right]_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}},\left[|v_3\rangle\right]_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}}\right\}\xrightarrow{\rho}\left\{\left[|\mathrm{e}_1\rangle\right]_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}},\left[|\mathrm{e}_2\rangle\right]_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}},\left[|\mathrm{e}_3\rangle\right]_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}}\right\}$$

или, конкретније

$$\begin{cases}\left[|\mathrm{e}_1\rangle\right]_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}}=\rho\left[|v_1\rangle\right]_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}}\\ \left[|\mathrm{e}_2\rangle\right]_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}}=\rho\left[|v_2\rangle\right]_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}}\\ \left[|\mathrm{e}_3\rangle\right]_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}}=\rho\left[|v_3\rangle\right]_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\rho_{11}&\rho_{12}&\rho_{13}\\\rho_{21}&\rho_{22}&\rho_{23}\\\rho_{31}&\rho_{32}&\rho_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}\\ \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\rho_{11}&\rho_{12}&\rho_{13}\\\rho_{21}&\rho_{22}&\rho_{23}\\\rho_{31}&\rho_{32}&\rho_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}\\ \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\rho_{11}&\rho_{12}&\rho_{13}\\\rho_{21}&\rho_{22}&\rho_{23}\\\rho_{31}&\rho_{32}&\rho_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\rho_{11}+\rho_{13}\\\rho_{21}+\rho_{23}\\\rho_{31}+\rho_{33}\end{bmatrix}\\ \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\rho_{11}+\rho_{12}\\\rho_{21}+\rho_{22}\\\rho_{31}+\rho_{32}\end{bmatrix}\\ \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\rho_{12}+\rho_{13}\\\rho_{22}+\rho_{23}\\\rho_{32}+\rho_{33}\end{bmatrix}\end{cases}$$

одакле следе три система једначина

$$\begin{cases}\rho_{11}+\rho_{13}=1\\\rho_{21}+\rho_{23}=0\\\rho_{31}+\rho_{33}=0\end{cases},\quad \begin{cases}\rho_{11}+\rho_{12}=0\\\rho_{21}+\rho_{22}=1\\\rho_{31}+\rho_{32}=0\end{cases}\quad \text{и}\quad \begin{cases}\rho_{12}+\rho_{13}=0\\\rho_{22}+\rho_{23}=0\\\rho_{32}+\rho_{33}=1\end{cases}$$

Прве једначине горња три система даће матричне елементе прве врсте

$$\begin{cases}\rho_{11}+\rho_{13}=1\\\rho_{11}+\rho_{12}=0\\\rho_{12}+\rho_{13}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\rho_{11}+\rho_{13}=1\\\rho_{11}+\rho_{12}=0\\\rho_{12}=-\rho_{13}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\rho_{11}+\rho_{13}=1\\\rho_{11}-\rho_{13}=0\\\rho_{12}=-\rho_{13}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2\rho_{11}=1\\\rho_{11}-\rho_{13}=0\\\rho_{12}=-\rho_{13}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\rho_{11}=1/2\\\rho_{13}=\rho_{11}=1/2\\\rho_{12}=-\rho_{13}=-1/2\end{cases}$$

друге једначине горња три система даће матричне елементе друге врсте

$$\begin{cases}\rho_{21}+\rho_{23}=0\\\rho_{21}+\rho_{22}=1\\\rho_{22}+\rho_{23}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\rho_{21}+\rho_{23}=0\\\rho_{21}+\rho_{22}=1\\\rho_{23}=-\rho_{22}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\rho_{21}-\rho_{22}=0\\\rho_{21}+\rho_{22}=1\\\rho_{23}=-\rho_{22}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\rho_{21}-\rho_{22}=0\\2\rho_{21}=1\\\rho_{23}=-\rho_{22}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\rho_{22}=\rho_{21}=1/2\\\rho_{21}=1/2\\\rho_{23}=-\rho_{22}=-1/2\end{cases}$$

док ће треће једначине горња три система дати матричне елементе треће врсте

$$\begin{cases}\rho_{31}+\rho_{33}=0\\\rho_{31}+\rho_{32}=0\\\rho_{32}+\rho_{33}=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\rho_{31}+\rho_{33}=0\\\rho_{31}=-\rho_{32}\\\rho_{32}+\rho_{33}=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-\rho_{32}+\rho_{33}=0\\\rho_{31}=-\rho_{32}\\\rho_{32}+\rho_{33}=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\rho_{32}=\rho_{33}\\\rho_{31}=-\rho_{32}\\\rho_{33}+\rho_{33}=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\rho_{32}=\rho_{33}=1/2\\\rho_{31}=-\rho_{32}=-1/2\\\rho_{33}=1/2\end{cases}$$

те тражена матрица преласка има облик

$$\rho=[\hat{\rho}]_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1&-1&1\\1&1&-1\\-1&1&1\end{bmatrix}.$$

Матрица преласка $\mathscr{T}$ и њој инверзна матрица ρ помножене ма којим редоследом морају у оба случаја дати јединичну матрицу. Прво се множе као

$$\mathscr{T}\rho=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&0&1\end{bmatrix}\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1&-1&1\\1&1&-1\\-1&1&1\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\cdot1+1\cdot1+0\cdot(-1)&1\cdot(-1)+1\cdot1+0\cdot1&1\cdot1+1\cdot(-1)+0\cdot1\\0\cdot1+1\cdot1+1\cdot(-1)&0\cdot(-1)+1\cdot1+1\cdot1&0\cdot1+1\cdot(-1)+1\cdot1\\1\cdot1+0\cdot1+1\cdot(-1)&1\cdot(-1)+0\cdot1+1\cdot1&1\cdot1+0\cdot(-1)+1\cdot1\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1+1+0&-1+1+0&1-1+0\\0+1-1&0+1+1&0-1+1\\1+0-1&-1+0+1&1+0+1\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\mathscr{I}$$

а потом као

$$\rho\mathscr{T}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1&-1&1\\1&1&-1\\-1&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&0&1\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\cdot1+(-1)\cdot0+1\cdot1&1\cdot1+(-1)\cdot1+1\cdot0&1\cdot0+(-1)\cdot1+1\cdot1\\1\cdot1+1\cdot0+(-1)\cdot1&1\cdot1+1\cdot1+(-1)\cdot0&1\cdot0+1\cdot1+(-1)\cdot1\\(-1)\cdot1+1\cdot0+1\cdot1&(-1)\cdot1+1\cdot1+1\cdot0&(-1)\cdot0+1\cdot1+1\cdot1\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1+0+1&1-1+0&0-1+1\\1+0-1&1+1+0&0+1-1\\-1+0+1&-1+1+0&0+1+1\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\mathscr{I}$$

Оба захтева су испуњена, те је заиста $\rho=\mathscr{T}^{-1}$ односно $\mathscr{T}=\rho^{-1}$.

Преостало је да се провери важење *трансформације сличности* за дати оператор

$$\left[\hat{A}\right]_{\{|v_i\rangle\}}=\mathscr{T}^{-1}\left[\hat{A}\right]_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}}\mathscr{T}$$

$$=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1&-1&1\\1&1&-1\\-1&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&1&0\\1&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&0&1\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1&-1&1\\1&1&-1\\-1&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\cdot1+1\cdot0+0\cdot1&2\cdot1+1\cdot1+0\cdot0&2\cdot0+1\cdot1+0\cdot1\\1\cdot1+0\cdot0+1\cdot1&1\cdot1+0\cdot1+1\cdot0&1\cdot0+0\cdot1+1\cdot1\\0\cdot1+1\cdot0+0\cdot1&0\cdot1+1\cdot1+0\cdot0&0\cdot0+1\cdot1+0\cdot1\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1&-1&1\\1&1&-1\\-1&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2+0+0&2+1+0&0+1+0\\1+0+1&1+0+0&0+0+1\\0+0+0&0+1+0&0+1+0\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1&-1&1\\1&1&-1\\-1&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&3&1\\2&1&1\\0&1&1\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\cdot2+(-1)\cdot2+1\cdot0&1\cdot3+(-1)\cdot1+1\cdot1&1\cdot1+(-1)\cdot1+1\cdot1\\1\cdot2+1\cdot2+(-1)\cdot0&1\cdot3+1\cdot1+(-1)\cdot1&1\cdot1+1\cdot1+(-1)\cdot1\\(-1)\cdot2+1\cdot2+1\cdot0&(-1)\cdot3+1\cdot1+1\cdot1&(-1)\cdot1+1\cdot1+1\cdot1\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}2-2+0&3-1+1&1-1+1\\2+2+0&3+1-1&1+1-1\\-2+2+0&-3+1+1&-1+1+1\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}0&3&1\\4&3&1\\0&-1&1\end{bmatrix}$$

што јесте једнако матрици $\left[\hat{A}\right]_{\{|v_i\rangle\}}$ добијеној раније.

(9.6) *Ротацијом* базиса $\{|\mathrm{e}_1\rangle, |\mathrm{e}_2\rangle, |\mathrm{e}_3\rangle\}$ око осе која пролази кроз координатни почетак добија се базис $\{|\mathrm{e}_1'\rangle, |\mathrm{e}_2'\rangle, |\mathrm{e}_3'\rangle\}$ у простору $\mathbb{R}^3$. Нека је φ_{ij} угао између вектора $|\mathrm{e}_i'\rangle$ и $|\mathrm{e}_j\rangle$. Показати да је

$$\alpha_{ij} = \cos\varphi_{ij}$$

матрични елемент матрице ротације из почетног у крајњи базис.

Такође извести како се, при оваквој промени базиса, мења

(а) матрица-колона којом се представља произвољни *вектор* из простора $\mathbb{R}^3$;

(б) квадратна матрица којом се представља *линеарни оператор* у простору $\mathbb{R}^3$.

Вектори почетног базиса ротирају се у векторе коначног базиса под деловањем оператора ротације $\hat{R}$

$$\{|\mathrm{e}_1\rangle, |\mathrm{e}_2\rangle, |\mathrm{e}_3\rangle\} \xrightarrow{\hat{R}} \{|\mathrm{e}_1'\rangle, |\mathrm{e}_2'\rangle, |\mathrm{e}_3'\rangle\};$$

или, конкретније

$$|\mathrm{e}_1'\rangle = \hat{R}|\mathrm{e}_1\rangle$$
$$|\mathrm{e}_2'\rangle = \hat{R}|\mathrm{e}_2\rangle$$
$$|\mathrm{e}_3'\rangle = \hat{R}|\mathrm{e}_3\rangle$$

Сад, сваки од овако добијених вектора може се, према основној формули репрезентовања, написати као линеарна комбинација полазних вектора на следећи начин

$$\begin{aligned} |\mathrm{e}_1'\rangle &= r_{11}|\mathrm{e}_1\rangle + r_{21}|\mathrm{e}_2\rangle + r_{31}|\mathrm{e}_3\rangle \\ |\mathrm{e}_2'\rangle &= r_{12}|\mathrm{e}_1\rangle + r_{22}|\mathrm{e}_2\rangle + r_{32}|\mathrm{e}_3\rangle; \\ |\mathrm{e}_3'\rangle &= r_{13}|\mathrm{e}_1\rangle + r_{23}|\mathrm{e}_2\rangle + r_{33}|\mathrm{e}_3\rangle \end{aligned}$$

коефицијенти горње три линеарне комбинације, написани транспоновано, формирају (у поставци задатка поменуту) матрицу ротације

$$\mathscr{R} = \left[\hat{R}\right]_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} = \left[r_{ij}\right].$$

У сажетијем облику горњи систем једначина пише се као

$$|\mathrm{e}_i'\rangle = \sum_{j=1}^{3} r_{ji}|\mathrm{e}_j\rangle, \ (i = \overline{1,3}).$$

Сада се формира скаларни производ сажетог израза са произвољним вектором почетног базиса

$$\langle \mathrm{e}_i' | \mathrm{e}_j \rangle = \left\langle \sum_{j=1}^{3} r_{ji} \langle \mathrm{e}_j | \middle| \mathrm{e}_j \right\rangle = \sum_{j=1}^{3} r_{ji} \langle \mathrm{e}_j | \mathrm{e}_j \rangle = r_{ji}$$

одакле је јасно да је произвољни матрични елемент матрице ротације једнак

$$r_{ji} = \left\langle \mathrm{e}'_i \middle| \mathrm{e}_j \right\rangle.$$

На основу дефиниције скаларног производа два вектора у тродимензионалном простору следи

$$r_{ji} = |\mathrm{e}'_i|\,|\mathrm{e}_j| \cos\varphi_{ij} = \cos\varphi_{ij}$$

а ово је, према поставци задатка, једнако

$$r_{ji} = \alpha_{ij}$$

чиме је показано да је

$$\alpha_{ij} = \cos\varphi_{ij}$$

заиста произвољни матрични елемент матрице ротације из почетног у крајњи базис.

(а) Као што се деловањем оператора ротације $\hat{R}$ произвољни вектор $|v\rangle$ из простора $\mathbb{R}^3$ пресликава у вектор

$$|v'\rangle = \hat{R}|v\rangle$$

тако се и матрица-колона - којом се представља вектор $|v\rangle$ - деловањем горе добијене матрице ротације $\mathscr{R}$ пресликава у матрицу-колону - којом се представља вектор $|v'\rangle$ - као

$$\big[|v'\rangle\big]_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}} = \mathscr{R}\big[|v\rangle\big]_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}},$$

односно

$$\begin{bmatrix} v'_1 \\ v'_2 \\ v'_3 \end{bmatrix} = \mathscr{R}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11}v_1 + r_{12}v_2 + r_{13}v_3 \\ r_{21}v_1 + r_{22}v_2 + r_{23}v_3 \\ r_{31}v_1 + r_{32}v_2 + r_{33}v_3 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \underline{\begin{cases} v'_1 = r_{11}v_1 + r_{12}v_2 + r_{13}v_3 \\ v'_2 = r_{21}v_1 + r_{22}v_2 + r_{23}v_3 \\ v'_3 = r_{31}v_1 + r_{32}v_2 + r_{33}v_3 \end{cases}}$$

што написано у сажетијем облику

$$v'_i = \sum_{j=1}^{3} r_{ij}\, v_j = \sum_{j=1}^{3} \cos\varphi_{ij}\, v_j\ ,\ (i = \overline{1,3})$$

представља начин на који се мењају компоненте матрице-колоне при 3Д ротацији.

Напомена: обратити пажњу да је, услед парности косинусне функције, свеједно да ли се пише $r_{ji} = \cos\varphi_{ij}$ или $r_{ij} = \cos\varphi_{ji}$.

(б) Из претходног задатка је познато да су матрице којима се представља оператор у два различита базиса повезане трансформацијом сличности као

$$\big[\hat{A}\big]_{\{|v_i\rangle\}} = \mathscr{T}^{-1}\big[\hat{A}\big]_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}}\mathscr{T}.$$

У случају ротације, трансформација сличности има следећи облик

$$\big[\hat{A}\big]_{\{|\mathrm{e}'_i\rangle\}} = \mathscr{R}\big[\hat{A}\big]_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}}\tilde{\mathscr{R}}.$$

где симбол $\tilde{\mathscr{R}}$ означава транспоновану матрицу ротације.

Конкретно записана, трансформација сличности за ротацију гласи

$$\begin{bmatrix} a'_{11} & a'_{12} & a'_{13} \\ a'_{21} & a'_{22} & a'_{23} \\ a'_{31} & a'_{32} & a'_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{11} & r_{21} & r_{31} \\ r_{12} & r_{22} & r_{32} \\ r_{13} & r_{23} & r_{33} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{11}a_{11} + r_{12}a_{12} + r_{13}a_{13} & r_{21}a_{11} + r_{22}a_{12} + r_{23}a_{13} & r_{31}a_{11} + r_{32}a_{12} + r_{33}a_{13} \\ r_{11}a_{21} + r_{12}a_{22} + r_{13}a_{23} & r_{21}a_{21} + r_{22}a_{22} + r_{23}a_{23} & r_{31}a_{21} + r_{32}a_{22} + r_{33}a_{23} \\ r_{11}a_{31} + r_{12}a_{32} + r_{13}a_{33} & r_{21}a_{31} + r_{22}a_{32} + r_{23}a_{33} & r_{31}a_{31} + r_{32}a_{32} + r_{33}a_{33} \end{bmatrix}$$

Елементи матрице којом се оператор представља у базису добијеном након ротације наведени су ниже, будући да су прилично кабасти

$$a'_{11} = r_{11}r_{11}a_{11} + r_{11}r_{12}a_{12} + r_{11}r_{13}a_{13} + r_{12}r_{11}a_{21} + r_{12}r_{12}a_{22} + r_{12}r_{13}a_{23} + r_{13}r_{11}a_{31} + r_{13}r_{12}a_{32} + r_{13}r_{13}a_{33}$$
$$a'_{12} = r_{11}r_{21}a_{11} + r_{11}r_{22}a_{12} + r_{11}r_{23}a_{13} + r_{12}r_{21}a_{21} + r_{12}r_{22}a_{22} + r_{12}r_{23}a_{23} + r_{13}r_{21}a_{31} + r_{13}r_{22}a_{32} + r_{13}r_{23}a_{33}$$
$$a'_{13} = r_{11}r_{31}a_{11} + r_{11}r_{32}a_{12} + r_{11}r_{33}a_{13} + r_{12}r_{31}a_{21} + r_{12}r_{32}a_{22} + r_{12}r_{33}a_{23} + r_{13}r_{31}a_{31} + r_{13}r_{32}a_{32} + r_{13}r_{33}a_{33}$$
$$a'_{21} = r_{21}r_{11}a_{11} + r_{21}r_{12}a_{12} + r_{21}r_{13}a_{13} + r_{22}r_{11}a_{21} + r_{22}r_{12}a_{22} + r_{22}r_{13}a_{23} + r_{23}r_{11}a_{31} + r_{23}r_{12}a_{32} + r_{23}r_{13}a_{33}$$
$$a'_{22} = r_{21}r_{21}a_{11} + r_{21}r_{22}a_{12} + r_{21}r_{23}a_{13} + r_{22}r_{21}a_{21} + r_{22}r_{22}a_{22} + r_{22}r_{23}a_{23} + r_{23}r_{21}a_{31} + r_{23}r_{22}a_{32} + r_{23}r_{23}a_{33}$$
$$a'_{23} = r_{21}r_{31}a_{11} + r_{21}r_{32}a_{12} + r_{21}r_{33}a_{13} + r_{22}r_{31}a_{21} + r_{22}r_{32}a_{22} + r_{22}r_{33}a_{23} + r_{23}r_{31}a_{31} + r_{23}r_{32}a_{32} + r_{23}r_{33}a_{33}$$
$$a'_{31} = r_{31}r_{11}a_{11} + r_{31}r_{12}a_{12} + r_{31}r_{13}a_{13} + r_{32}r_{11}a_{21} + r_{32}r_{12}a_{22} + r_{32}r_{13}a_{23} + r_{33}r_{11}a_{31} + r_{33}r_{12}a_{32} + r_{33}r_{13}a_{33}$$
$$a'_{32} = r_{31}r_{21}a_{11} + r_{31}r_{22}a_{12} + r_{31}r_{23}a_{13} + r_{32}r_{21}a_{21} + r_{32}r_{22}a_{22} + r_{32}r_{23}a_{23} + r_{33}r_{21}a_{31} + r_{33}r_{22}a_{32} + r_{33}r_{23}a_{33}$$
$$a'_{33} = r_{31}r_{31}a_{11} + r_{31}r_{32}a_{12} + r_{31}r_{33}a_{13} + r_{32}r_{31}a_{21} + r_{32}r_{32}a_{22} + r_{32}r_{33}a_{23} + r_{33}r_{31}a_{31} + r_{33}r_{32}a_{32} + r_{33}r_{33}a_{33}$$

Све ово може да се запише сажетије, као

$$a'_{ij} = \sum_{k=1}^{3}\sum_{l=1}^{3} r_{ik}\, r_{jl}\, a_{kl} = \sum_{k=1}^{3}\sum_{l=1}^{3} \cos\varphi_{ik} \cos\varphi_{jl}\, a_{kl}\,,\ (i,j=\overline{1,3})\,,$$

и представља начин на који се мењају компоненте квадратне матрице при 3Д ротацији.

Напомена: будући да је косинус парна функција, свеједно да ли се пише $r_{ab} = \cos\varphi_{ab}$ или $r_{ba} = \cos\varphi_{ba}$.

(9.7) Нека су у векторском простору $\mathbb{R}^3$ дата два Декартова координатна система са истим координатним почетком и ортовима координатних оса $\{\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z\}$ и $\{\vec{e}'_x, \vec{e}'_y, \vec{e}'_z\}$. Нека је OL пресек равни Oxy и $Ox'y'$. Тада се трансформација која преводи први у други базис може представити као узастопно извођење *три ротације*

(i) ротације $\{\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z\}$ око $z-$осе за угао α, што доводи до поклапања $x-$осе са пресеком OL;

(ii) ротације тако добијеног координатног система око пресека OL за угао β, што доводи до поклапања $z-$осе са $z'-$осом;

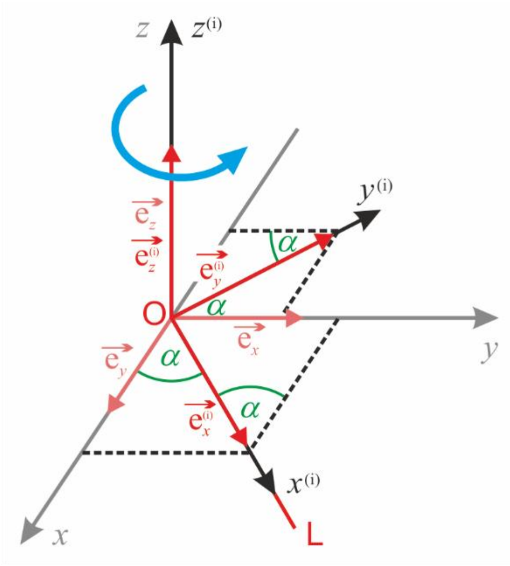
(iii) ротације овако добијеног координатног система око $z'-$осе за угао γ, што доводи до поклапања пресека са $x'-$осом.

Матрицу која преводи $\{\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z\}$ у $\{\vec{e}'_x, \vec{e}'_y, \vec{e}'_z\}$ изразити преко *Ојлерових углова* $\alpha, \gamma \in [0, 2\pi]$ и $\beta \in [0, \pi]$.

(i) Ротација око $z-$осе

$$\{\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z\} \xrightarrow{\hat{A}} \{\vec{e}_x^{(i)}, \vec{e}_y^{(i)}, \vec{e}_z^{(i)}\}$$

приказана је на слици датој ниже



са које се лепо види да је

$$\vec{e}_x^{(i)} = \cos\alpha\,\vec{e}_x + \sin\alpha\,\vec{e}_y + 0\,\vec{e}_z$$
$$\vec{e}_y^{(i)} = -\sin\alpha\,\vec{e}_x + \cos\alpha\,\vec{e}_y + 0\,\vec{e}_z$$
$$\vec{e}_z^{(i)} = 0\,\vec{e}_x + 0\,\vec{e}_y + 1\,\vec{e}_z$$

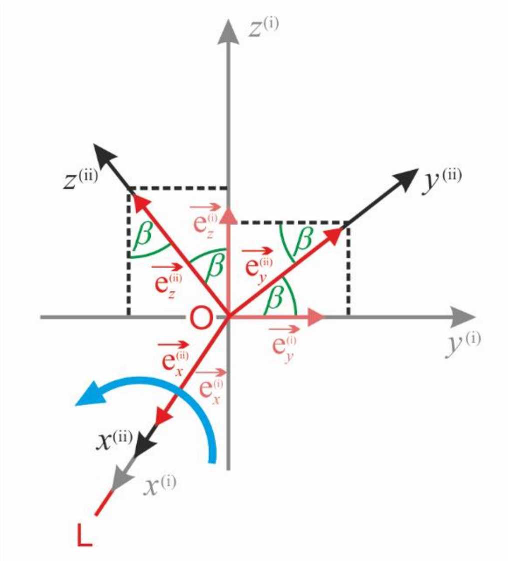
Постављањем коефицијената уз горње ортове у шему бројева добија се матрица прве ротације

$$\mathscr{A} = \left[\hat{A}\right]_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(ii) Ротација око $x^{(\mathrm{i})}$ – осе

$$\left\{\vec{\mathrm{e}}_x^{(\mathrm{i})}, \vec{\mathrm{e}}_y^{(\mathrm{i})}, \vec{\mathrm{e}}_z^{(\mathrm{i})}\right\} \xrightarrow{\hat{A}} \left\{\vec{\mathrm{e}}_x^{(\mathrm{ii})}, \vec{\mathrm{e}}_y^{(\mathrm{ii})}, \vec{\mathrm{e}}_z^{(\mathrm{ii})}\right\}$$

приказана је на следећој слици



одакле се види да је

$$\vec{\mathrm{e}}_x^{(\mathrm{ii})} = 1\vec{\mathrm{e}}_x^{(\mathrm{i})} + 0\,\vec{\mathrm{e}}_y^{(\mathrm{i})} + 0\,\vec{\mathrm{e}}_z^{(\mathrm{i})}$$
$$\vec{\mathrm{e}}_y^{(\mathrm{ii})} = 0\,\vec{\mathrm{e}}_x^{(\mathrm{i})} + \cos\beta\,\vec{\mathrm{e}}_y^{(\mathrm{i})} + \sin\beta\,\vec{\mathrm{e}}_z^{(\mathrm{i})}$$
$$\vec{\mathrm{e}}_z^{(\mathrm{ii})} = 0\,\vec{\mathrm{e}}_x^{(\mathrm{i})} - \sin\beta\,\vec{\mathrm{e}}_y^{(\mathrm{i})} + \cos\beta\,\vec{\mathrm{e}}_z^{(\mathrm{i})}$$

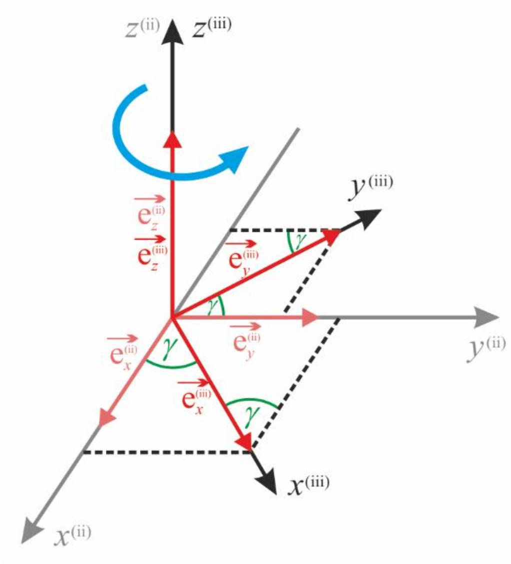
Ређањем коефицијената уз горње ортове у шему бројева добија се матрица друге ротације

$$\mathscr{B} = \left[\hat{B}\right]_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\beta & -\sin\beta \\ 0 & \sin\beta & \cos\beta \end{bmatrix}.$$

(iii) Ротација око z' – осе

$$\left\{\vec{\mathrm{e}}_x^{(\mathrm{ii})}, \vec{\mathrm{e}}_y^{(\mathrm{ii})}, \vec{\mathrm{e}}_z^{(\mathrm{ii})}\right\} \xrightarrow{\hat{A}} \left\{\vec{\mathrm{e}}_x^{(\mathrm{iii})}, \vec{\mathrm{e}}_y^{(\mathrm{iii})}, \vec{\mathrm{e}}_z^{(\mathrm{iii})}\right\}$$

дата је на следећој слици



и лепо се види да је

$$\vec{\mathrm{e}}_x^{(\mathrm{iii})} = \cos\gamma\,\vec{\mathrm{e}}_x^{(\mathrm{ii})} + \sin\gamma\,\vec{\mathrm{e}}_y^{(\mathrm{ii})} + 0\,\vec{\mathrm{e}}_z^{(\mathrm{ii})}$$
$$\vec{\mathrm{e}}_y^{(\mathrm{iii})} = -\sin\gamma\,\vec{\mathrm{e}}_x^{(\mathrm{ii})} + \cos\gamma\,\vec{\mathrm{e}}_y^{(\mathrm{ii})} + 0\,\vec{\mathrm{e}}_z^{(\mathrm{ii})}$$
$$\vec{\mathrm{e}}_z^{(\mathrm{iii})} = 0\,\vec{\mathrm{e}}_x^{(\mathrm{ii})} + 0\,\vec{\mathrm{e}}_y^{(\mathrm{ii})} + 1\,\vec{\mathrm{e}}_z^{(\mathrm{ii})}$$

Постављањем коефицијената уз горње ортове у шему бројева добија се матрица треће ротације

$$\mathscr{C} = \left[\hat{C}\right]_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}} = \begin{bmatrix} \cos\gamma & -\sin\gamma & 0 \\ \sin\gamma & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Сви ортови крајњег система добијају се из одговарајућих претходних система применом оператора одговарајуће ротације

$$\vec{\mathrm{e}}'_x = \vec{\mathrm{e}}_x^{(\mathrm{iii})} = \hat{C}\,\vec{\mathrm{e}}_x^{(\mathrm{ii})} = \hat{C}\,\hat{B}\,\vec{\mathrm{e}}_x^{(\mathrm{i})} = \hat{C}\,\hat{B}\,\hat{A}\,\vec{\mathrm{e}}_x$$
$$\vec{\mathrm{e}}'_y = \vec{\mathrm{e}}_y^{(\mathrm{iii})} = \hat{C}\,\vec{\mathrm{e}}_y^{(\mathrm{ii})} = \hat{C}\,\hat{B}\,\vec{\mathrm{e}}_y^{(\mathrm{i})} = \hat{C}\,\hat{B}\,\hat{A}\,\vec{\mathrm{e}}_y$$
$$\vec{\mathrm{e}}'_z = \vec{\mathrm{e}}_z^{(\mathrm{iii})} = \hat{C}\,\vec{\mathrm{e}}_z^{(\mathrm{ii})} = \hat{C}\,\hat{B}\,\vec{\mathrm{e}}_z^{(\mathrm{i})} = \hat{C}\,\hat{B}\,\hat{A}\,\vec{\mathrm{e}}_z$$

односно

$$\vec{\mathrm{e}}'_x = \hat{R}\,\vec{\mathrm{e}}_x = \hat{C}\,\hat{B}\,\hat{A}\,\vec{\mathrm{e}}_x$$
$$\vec{\mathrm{e}}'_y = \hat{R}\,\vec{\mathrm{e}}_y = \hat{C}\,\hat{B}\,\hat{A}\,\vec{\mathrm{e}}_y$$
$$\vec{\mathrm{e}}'_z = \hat{R}\,\vec{\mathrm{e}}_z = \hat{C}\,\hat{B}\,\hat{A}\,\vec{\mathrm{e}}_z$$

одакле је лако схватити да је оператор укупне ротације једнак

$$\left[\hat{R}\right]_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}} = \left[\hat{C}\right]_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}} \left[\hat{B}\right]_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}} \left[\hat{A}\right]_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}}.$$

илити

$$\mathscr{R} = \mathscr{C}\mathscr{B}\mathscr{A} .$$

Ако се узму у обзир трансформације сличности

$$\mathscr{B}\mathscr{A} = \mathscr{A}\mathscr{B}\mathscr{A}^{-1}\mathscr{A} = \mathscr{A}\mathscr{B} \quad \text{и} \quad \mathscr{C} = (\mathscr{A}\mathscr{B})\mathscr{C}(\mathscr{A}\mathscr{B})^{-1}$$

на основу горње формуле лако је добити матрицу оператора укупне ротације која преводи координатни систем $\{\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z\}$ у координатни систем $\{\vec{e}'_x, \vec{e}'_y, \vec{e}'_z\}$

$$\begin{aligned}
\mathscr{R} &= \mathscr{C}\mathscr{B}\mathscr{A} = (\mathscr{A}\mathscr{B})\mathscr{C}(\mathscr{A}\mathscr{B})^{-1}\mathscr{A}\mathscr{B} = \mathscr{A}\mathscr{B}\mathscr{C} \\
&= \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\beta & -\sin\beta \\ 0 & \sin\beta & \cos\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\gamma & -\sin\gamma & 0 \\ \sin\gamma & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\gamma & -\sin\gamma & 0 \\ \cos\beta\sin\gamma & \cos\beta\cos\gamma & -\sin\beta \\ \sin\beta\sin\gamma & \sin\beta\cos\gamma & \cos\beta \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \cos\alpha\cos\gamma - \sin\alpha\cos\beta\sin\gamma & -\cos\alpha\sin\gamma - \sin\alpha\cos\beta\cos\gamma & \sin\alpha\sin\beta \\ \sin\alpha\cos\gamma + \cos\alpha\cos\beta\sin\gamma & -\sin\alpha\sin\gamma + \cos\alpha\cos\beta\cos\gamma & -\cos\alpha\sin\beta \\ \sin\beta\sin\gamma & \sin\beta\cos\gamma & \cos\beta \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

(9.8) Нека су $\{|v_1\rangle,|v_2\rangle,\ldots,|v_n\rangle\}$ и $\{|V_1\rangle,|V_2\rangle,\ldots,|V_n\rangle\}$ међусобно реципрочни базиси

$$\langle V_i | v_j \rangle = \delta_{ij}\,.$$

Показати да су матрични елементи оператора преласка $\hat{G}$ из $\{|v_i\rangle, i=\overline{1,n}\}$ у $\{|V_i\rangle, i=\overline{1,n}\}$ дати изразом: $g^{ij}=\langle V_i | V_j\rangle$, а матрични елементи оператора преласка $\hat{G}'$ из $\{|V_i\rangle, i=\overline{1,n}\}$ у $\{|v_i\rangle, i=\overline{1,n}\}$ дати изразом: $g_{ij}=\langle v_i | v_j\rangle$. Такође одредити везу између координата вектора у реципрочним базисима.

Према поставци задатка оператор преласка $\hat{G}$ делује на следећи начин

$$\{|v_1\rangle,|v_2\rangle,\ldots,|v_n\rangle\}\xrightarrow{\hat{G}}\{|V_1\rangle,|V_2\rangle,\ldots,|V_n\rangle\}$$

што се може представити изразом

$$|V_i\rangle=\hat{G}|v_i\rangle$$

који је једнак

$$|V_i\rangle=\sum_{j=1}^{n} g^{ji}\,|v_j\rangle\,.$$

Потом се формира скаларни производ горњег израза са произвољним вектором из другог система

$$\langle V_k | V_i\rangle=\left\langle V_k \middle| \sum_{j=1}^{n} g^{ji}\,|v_j\rangle\right\rangle=\sum_{j=1}^{n} g^{ji}\langle V_k | v_j\rangle\,.$$

У поставци задатка је наведено да је скаларни производ у горњој суми једнак Кронекеровом делта, те следи

$$\langle V_k | V_i\rangle=\sum_{j=1}^{n} g^{ji}\delta_{kj}=g^{ki}\,.$$

С друге стране, оператор обрнутог преласка $\hat{G}'$ делује овако

$$\{|v_1\rangle,|v_2\rangle,\ldots,|v_n\rangle\}\xleftarrow{\hat{G}'}\{|V_1\rangle,|V_2\rangle,\ldots,|V_n\rangle\}$$

што се може написати и као

$$|v_i\rangle=\hat{G}'|V_i\rangle$$

који је једнак

$$|v_i\rangle=\sum_{j=1}^{n} g_{ji}\,|V_j\rangle\,.$$

Као и пре, направи се скаларни производ горњег израза, само овог пута са произвољним вектором из првог система

$$\langle v_k | v_i \rangle = \left\langle v_k \left| \sum_{j=1}^{n} g_{ji} \, | V_j \rangle \right. \right\rangle = \sum_{j=1}^{n} g_{ji} \langle v_k | V_j \rangle .$$

Скаларни производ у горњој суми је према поставци задатка једнак Кронекеровом делта, па је

$$\langle v_k | v_i \rangle = \sum_{j=1}^{n} g_{ji} \delta_{kj} = g_{ki} .$$

Сад, на основу задатка (3.28) се зна да се произвољни вектор $|v\rangle$ може у првом базису представити следећим изразом

$$|v\rangle = \sum_{i=1}^{n} \xi_i |v_i\rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle V_i | v \rangle |v_i\rangle$$

где су ξ_i координате проозвољног вектора у првом базису.

Према истом задатку је познато да се произвољни вектор $|v\rangle$ може у другом базису дати следећом формулом

$$|v\rangle = \sum_{i=1}^{n} \eta_i |v_i\rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle v_i | v \rangle |V_i\rangle$$

где су η_i координате произвољног вектора у другог базису.

Веза између координата ξ_i у првом и координата η_i у другом базису добија се из следећег скаларног производа

$$\langle v_j | v \rangle = \left\langle v_j \left| \sum_{i=1}^{n} \xi_i |v_i\rangle \right. \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \langle v_j | v_i \rangle$$

ако се уочи да је скаларни производ са леве стране једнак координатама η_j у другом базису

$$\eta_j = \sum_{i=1}^{n} \langle v_j | v_i \rangle \xi_i .$$

(9.9) Одредити реципрочан базис $\{|V_1\rangle=(\alpha,\beta,\gamma),|V_2\rangle=(\delta,\varepsilon,\xi),|V_3\rangle=(\mu,\eta,\omega)\}$ базиса $\{|v_1\rangle=(1,1,0),|v_2\rangle=(1,0,1),|v_3\rangle=(0,1,1)\}$, а затим у тако добијеном реципрочном базису наћи координате вектора

$$|v\rangle=2|v_1\rangle+3|v_2\rangle+|v_3\rangle .$$

Два међусобно реципрочна базиса повезана су формулом

$$\langle V_i|v_j\rangle=\delta_{ij}\ \ (i=\overline{1,3},\ \ j=\overline{1,3}).$$

Компоненте првог реципрочног вектора добијају се за $i=1$

$$\langle V_1|v_j\rangle=\delta_{1j}\ \ (j=\overline{1,3}),$$

односно из следећег система једначина

$$\begin{cases}\langle V_1|v_1\rangle=\delta_{11}\\ \langle V_1|v_2\rangle=\delta_{12}\\ \langle V_1|v_3\rangle=\delta_{13}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\langle(\alpha,\beta,\gamma)|(1,1,0)\rangle=1\\ \langle(\alpha,\beta,\gamma)|(1,0,1)\rangle=0\\ \langle(\alpha,\beta,\gamma)|(0,1,1)\rangle=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha+\beta=1\\ \alpha+\gamma=0\\ \beta+\gamma=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha+\beta=1\\ \alpha=-\gamma\\ \beta=-\gamma\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2\alpha=1\\ \beta=\alpha\\ \gamma=-\beta\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=1/2\\ \beta=1/2\\ \gamma=-1/2\end{cases}$$

те је први вектор реципрочног базиса једнак

$$|V_1\rangle=\frac{1}{2}(1,1,-1) .$$

Компоненте другог реципрочног вектора добијају се за $i=2$

$$\langle V_2|v_j\rangle=\delta_{2j}\ \ (j=\overline{1,3}),$$

тј. из следећег система једначина

$$\begin{cases}\langle V_2|v_1\rangle=\delta_{21}\\ \langle V_2|v_2\rangle=\delta_{22}\\ \langle V_2|v_3\rangle=\delta_{23}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\langle(\delta,\varepsilon,\xi)|(1,1,0)\rangle=0\\ \langle(\delta,\varepsilon,\xi)|(1,0,1)\rangle=1\\ \langle(\delta,\varepsilon,\xi)|(0,1,1)\rangle=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\delta+\varepsilon=0\\ \delta+\xi=1\\ \varepsilon+\xi=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\delta=-\varepsilon\\ \delta+\xi=1\\ \xi=-\varepsilon\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\varepsilon=-\delta\\ 2\delta=1\\ \xi=-\varepsilon\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\varepsilon=-1/2\\ \delta=1/2\\ \xi=1/2\end{cases}$$

па је други вектор реципрочног базиса једнак

$$|V_2\rangle=\frac{1}{2}(1,-1,1) .$$

Компоненте трећег реципрочног вектора добијају се за $i=3$

$$\langle V_3|v_j\rangle=\delta_{3j}\ \ (j=\overline{1,3}),$$

тј. из следећег система једначина

$$\begin{cases}\langle V_3|v_1\rangle=\delta_{31}\\ \langle V_3|v_2\rangle=\delta_{32}\\ \langle V_3|v_3\rangle=\delta_{33}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\langle(\mu,\eta,\omega)|(1,1,0)\rangle=0\\ \langle(\mu,\eta,\omega)|(1,0,1)\rangle=0\\ \langle(\mu,\eta,\omega)|(0,1,1)\rangle=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\mu+\eta=0\\ \mu+\omega=0\\ \eta+\omega=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\eta=-\mu\\ \omega=-\mu\\ \eta+\omega=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mu=-\eta\\ \omega=-\mu\\ 2\eta=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\mu=-1/2\\ \omega=1/2\\ \eta=1/2\end{cases}$$

одакле је трећи вектор реципрочног базиса једнак

$$|V_3\rangle = \frac{1}{2}(-1,1,1).$$

Реципрочни базис је онда једнак

$$\{|V_1\rangle = (1,1,-1), |V_2\rangle = (1,-1,1), |V_3\rangle = (-1,1,1)\}.$$

Координате вектора $|v\rangle = 2|v_1\rangle + 3|v_2\rangle + |v_3\rangle$ у базису $\{|v_1\rangle, |v_2\rangle, |v_3\rangle\}$ једнаке су

$$\xi_1 = 2,\ \xi_2 = 3,\ \xi_3 = 1.$$

Координате овог вектора $|v\rangle = 2|v_1\rangle + 3|v_2\rangle + |v_3\rangle$ у реципрочном базису биће добијене на основу формуле изведене у задатку (9.8)

$$\eta_j = \sum_{i=1}^{3} \langle v_j | v_i \rangle \xi_i .$$

Прва координата вектора $|v\rangle$ у реципрочном базису добија се као

$$\begin{aligned}
\eta_1 &= \sum_{i=1}^{3} \langle v_1 | v_i \rangle \xi_i = \langle v_1 | v_1 \rangle \xi_1 + \langle v_1 | v_2 \rangle \xi_2 + \langle v_1 | v_3 \rangle \xi_3 \\
&= \langle (1,1,0) | (1,1,0) \rangle \xi_1 + \langle (1,1,0) | (1,0,1) \rangle \xi_2 + \langle (1,1,0) | (0,1,1) \rangle \xi_3 \\
&= 2\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = 2 \cdot 2 + 3 + 1 = 8
\end{aligned}$$

Друга координата вектора $|v\rangle$ у реципрочном базису једнака је

$$\begin{aligned}
\eta_2 &= \sum_{i=1}^{3} \langle v_2 | v_i \rangle \xi_i = \langle v_2 | v_1 \rangle \xi_1 + \langle v_2 | v_2 \rangle \xi_2 + \langle v_2 | v_3 \rangle \xi_3 \\
&= \langle (1,0,1) | (1,1,0) \rangle \xi_1 + \langle (1,0,1) | (1,0,1) \rangle \xi_2 + \langle (1,0,1) | (0,1,1) \rangle \xi_3 \\
&= \xi_1 + 2\xi_2 + \xi_3 = 2 + 2 \cdot 3 + 1 = 9
\end{aligned}$$

Трећа координата вектора $|v\rangle$ у реципрочном базису једнака је

$$\begin{aligned}
\eta_3 &= \sum_{i=1}^{3} \langle v_3 | v_i \rangle \xi_i = \langle v_3 | v_1 \rangle \xi_1 + \langle v_3 | v_2 \rangle \xi_2 + \langle v_3 | v_3 \rangle \xi_3 \\
&= \langle (0,1,1) | (1,1,0) \rangle \xi_1 + \langle (0,1,1) | (1,0,1) \rangle \xi_2 + \langle (0,1,1) | (0,1,1) \rangle \xi_3 \\
&= \xi_1 + \xi_2 + 2\xi_3 = 2 + 3 + 2 \cdot 1 = 7
\end{aligned}$$

Значи да је вектор $|v\rangle = 2|v_1\rangle + 3|v_2\rangle + |v_3\rangle$ у реципрочном базису дат изразом

$$|v\rangle = 8|V_1\rangle + 9|V_2\rangle + 7|V_3\rangle.$$

(9.10) Показати да трансформација сличности *одржава* алгебарске операције сабирања матрица и множења матрица.

Одржавање операције сабирања матрица

$$\mathscr{U}^{\dagger}(\mathscr{A}+\mathscr{B})\mathscr{U}=\mathscr{U}^{\dagger}(\mathscr{A}\mathscr{U}+\mathscr{B}\mathscr{U})=\mathscr{U}^{\dagger}\mathscr{A}\mathscr{U}+\mathscr{U}^{\dagger}\mathscr{B}\mathscr{U}\ .$$

Одржавање операције множења матрица

$$\mathscr{U}^{\dagger}(\mathscr{A}\mathscr{B})\mathscr{U}=\mathscr{U}^{\dagger}(\mathscr{A}\mathscr{I}\mathscr{B})\mathscr{U}=\mathscr{U}^{\dagger}(\mathscr{A}\mathscr{U}\mathscr{U}^{\dagger}\mathscr{B})\mathscr{U}=(\mathscr{U}^{\dagger}\mathscr{A}\mathscr{U})(\mathscr{U}^{\dagger}\mathscr{B}\mathscr{U})\ .$$

(9.11) Нека је $\hat{A}$ линеарни оператор у $n-$димензионалном простору $\mathbb{V}$, док је $\mathbb{W}$ $m-$димензионални потпростор ($m<n$) простора $\mathbb{V}$, инваријантан на деловање оператора $\hat{A}$.

(а) Показати да постоји *адаптирани базис* у коме матрица оператора $\hat{A}$ има облик

$$\begin{bmatrix} X & Y \\ 0 & Z \end{bmatrix}$$

где је X подматрица типа $m\times m$.

(б) Ако је простор $\mathbb{V}$ директан збир m_1-димензионалног потпростора $\mathbb{W}_1$ и m_2-димензионалног $\mathbb{W}_2$, показати да постоји *базис* у коме се оператор $\hat{A}$ представља матрицом

$$\begin{bmatrix} X & 0 \\ 0 & Z \end{bmatrix}$$

где је X подматрица типа $m_1\times m_1$, док је Z подматрица типа $m_2\times m_2$.

(а) *Адаптирани базис* чине вектори којима се потпростор $\mathbb{W}$ допуњава до целог простора $\mathbb{V}$. Базис простора $\mathbb{V}$ чине вектори $\{|v_1\rangle,|v_2\rangle,\dots,|v_m\rangle,|v_{m+1}\rangle,\dots,|v_n\rangle\}$, док базис потпростора $\mathbb{W}$ чине вектори $\{|v_1\rangle,|v_2\rangle,\dots,|v_m\rangle\}$. Адаптирани базис, односно допуну потпростора $\mathbb{W}$, чине вектори $\{|v_{m+1}\rangle,\dots,|v_n\rangle\}$.

Због услова инваријатности потпростора $\mathbb{W}$ на деловање оператора $\hat{A}$, ликови $\hat{A}|v_i\rangle$ вектора $|v_i\rangle$ из $\mathbb{W}$ такође припадају потпростору $\mathbb{W}$

$$\begin{cases} \hat{A}|v_1\rangle = a_{11}|v_1\rangle+\dots+a_{1m}|v_m\rangle+0|v_{m+1}\rangle+\dots+0|v_n\rangle \\ \qquad\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ \hat{A}|v_m\rangle = a_{m1}|v_1\rangle+\dots+a_{mm}|v_m\rangle+0|v_{m+1}\rangle+\dots+0|v_n\rangle \\ \hat{A}|v_{m+1}\rangle = a_{m+1,1}|v_1\rangle+\dots+a_{m+1,m}|v_m\rangle+a_{m+1,m+1}|v_{m+1}\rangle+\dots+a_{m+1,n}|v_n\rangle \\ \qquad\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ \hat{A}|v_n\rangle = a_{n1}|v_1\rangle+\dots+a_{nm}|v_m\rangle+a_{n,m+1}|v_{m+1}\rangle+\dots+a_{nn}|v_n\rangle \end{cases}$$

Горњи коефицијенти ређају се у тражену матрицу транспоновано

$$\mathscr{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{m1} & a_{m+1,1} & \dots & a_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1m} & \dots & a_{mm} & a_{m+1,m} & \dots & a_{nm} \\ 0 & \dots & 0 & a_{m+1,m+1} & \dots & a_{n,m+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_{m+1,n} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} X & Y \\ 0 & Z \end{bmatrix}$$

(б) Базис простора $\mathbb{V}$ чине вектори $\left\{\left|v_1\right\rangle,\left|v_2\right\rangle,\ldots,\left|v_{m_1}\right\rangle,\left|v_{m_1+1}\right\rangle,\ldots,\left|v_n\right\rangle\right\}$, базис потпростора $\mathbb{W}_1$ чини m_1 вектора $\left\{\left|v_1\right\rangle,\left|v_2\right\rangle,\ldots,\left|v_{m_1}\right\rangle\right\}$, док базис потпростора $\mathbb{W}_2$ чини m_2 вектора $\left\{\left|v_{m_1}\right\rangle,\left|v_{m_1+1}\right\rangle,\ldots,\left|v_n\right\rangle\right\}$.

Према основној формули репрезентовања, ликови $\hat{A}\left|v_i\right\rangle$ могу да се представе као линеарне комбинације свих базисних вектора простора $\mathbb{V}$

$$\begin{cases}\hat{A}\left|v_1\right\rangle = a_{11}\left|v_1\right\rangle+\ldots+a_{1m_1}\left|v_{m_1}\right\rangle+0\left|v_{m_1+1}\right\rangle+\ldots+0\left|v_n\right\rangle\\ \qquad\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots\\ \hat{A}\left|v_{m_1}\right\rangle = a_{m_1 1}\left|v_1\right\rangle+\ldots+a_{m_1 m_1}\left|v_{m_1}\right\rangle+0\left|v_{m_1+1}\right\rangle+\ldots+0\left|v_n\right\rangle\\ \hat{A}\left|v_{m_1+1}\right\rangle = 0\left|v_1\right\rangle+\ldots+0\left|v_{m_1}\right\rangle+a_{m_1+1,m_1+1}\left|v_{m_1+1}\right\rangle+\ldots+a_{m_1+1,n}\left|v_n\right\rangle\\ \qquad\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots\\ \hat{A}\left|v_n\right\rangle = 0\left|v_1\right\rangle+\ldots+0\left|v_{m_1}\right\rangle+a_{n,m_1+1}\left|v_{m_1+1}\right\rangle+\ldots+a_{nn}\left|v_n\right\rangle\end{cases}$$

што се матрично записује у следећем облику

$$\mathscr{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{m_1 1} & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{1m_1} & \cdots & a_{m_1 m_1} & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \cdots & 0 & a_{m_1+1,m_1+1} & \cdots & a_{n,m_1+1}\\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & 0 & a_{m_1+1,n} & \cdots & a_{nn}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} X & 0\\ 0 & Z\end{bmatrix}$$